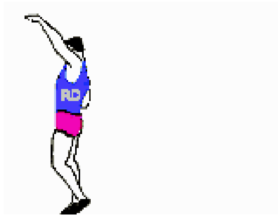
Geometrie-Aufgabe zum Kugelstoßen für die Klasse 10

Schon bei den Kelten galt das Stoßen von Gesteinsbrocken und Baumstämmen zum Brauchtum. Überlebt haben diese Ausprägungen bei den "Highland-Games" in Schottland. Im Mittelalter stießen Soldaten mit Kanonenkugeln.
In England wurde 1857 das Kugelgewicht mit 16 englischen Pfund festgesetzt, das entspricht einem Gewicht von 7,257 kg. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde das Abwurfquadrat durch einen Kreis mit einem Durchmesser von 2,135 m ersetzt.
Die auch heute noch gebräuchlichste Technik beim Kugelstoßen wurde vom Amerikaner O'Brien eingeführt, der damit 1953 zweimal Weltrekord stieß. Bei dieser Technik gelangt der Athlet durch ein Anhüpfen ("Angleiten") in die eigentliche Stoßauslage.
Bei den olympischen Spielen 1972 in München erregte der Russe Baryschnikow Aufsehen mit der Drehstoß-Technik. Diese Technik wurde bereits in den 30er bzw. 50er Jahren erprobt, fand jedoch erst jetzt wirkliche Bedeutung. Bei dieser Technik wird, ähnlich dem Diskuswurf, ein Drehsprung zur Erhöhung der potentiellen Stoßenergie angewendet. Da diese Technik jedoch hohe Anforderungen an die Koordination stellt und von den erzielbaren Weiten im gleichen Bereich wie das Angleiten liegt, findet sie kaum Anwendung. Der derzeit gültige Weltrekord wurde allerdings mit dieser Technik erzielt.

Männer-Weltrekord:
Randy Barnes (USA) am 20.5.1990, Los Angeles, 23.12 m
Frauen-Weltrekord:
N. Lisovskaya (URS) am 7.6.1987, Moscow, 22.63 m
(Hinweis: Die Frauenkugel ist leichter!)



Meim Kugelstoßen der Männer gilt für die Masse m und den Kugeldurchmesser $d = 2\,r$:

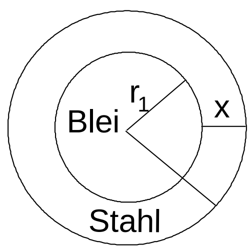
$m = 7{,}257$ kg und $d = 2\,r$ darf zwischen 110 mm und 130 mm betragen.

Für die Kugeln beim Kugelstoßen werden meistens zwei Materialien verwendet.
Häufig findet man Stahl (Dichte $7,86\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) und Blei (Dichte $11,35\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$).

1. Welchen Durchmesser hat ein Kugel die nur aus Stahl bzw. nur aus Blei besteht?
   Warum verwendet man nicht nur ein Material?

2. Welche Masse hat eine Bleikugel, wenn ihr Durchmesser 110 mm beträgt?
   Welche Masse hat eine Stahlkugel, wenn ihr Durchmesser 110 mm bzw. 130 mm beträgt?

3. Eine Kugel soll den Durchmesser 115 mm haben.
   Sie soll aus einem Bleikern (mit Radius r_1) und einem Stahlmantel bestehen. (Siehe Bild!)
   Bestimmen Sie r_1 und die Dicke x des Stahlmantels!



4. Eine Kugel soll wie in Aufgabe 3. aus einem Bleikern und einem Stahlmantel bestehen.
   Blei uns Stahl sollen gleiche Gewichtsanteile annehmen.
   Welcher Kugeldurchmesser ergibt sich? Handelt es sich um eine für den Wettkampf zugelassene Kugel?

5. Eine Kugel soll wie in Aufgabe 3. aus einem Bleikern und einem Stahlmantel bestehen.
   Blei uns Stahl sollen gleiche Volumenanteile besitzen.
   Welcher Kugeldurchmesser ergibt sich? Handelt es sich um eine für den Wettkampf zugelassene Kugel?

G.R.

Geometrie-Aufgabe zum Kugelstoßen * Lösungen * Aufgabe 1

Masse $m = \varrho \cdot V = \frac{4}{3} r^3 \pi \varrho \quad \Rightarrow \quad d = 2r = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3\,m}{4\pi\,\varrho}}$

Für die Stahlkugel gilt also: $2\,r_s = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 7257\text{ g}}{4\pi \cdot 7{,}86\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = 12{,}1\text{ cm}$

Für die Bleikugel gilt also: $2\,r_b = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 7257\text{ g}}{4\pi \cdot 11{,}35\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = 10{,}7\text{ cm}$

Da die Masse fest vorgegeben ist, ergibt sich für jedes Material einheitlicher Dichte ein eindeutiger Kugeldurchmesser. Für Blei liegt dieser Kugeldurchmesser nicht einmal im erlaubten Bereich.
Will man einen bestimmten Kugeldurchmesser haben, verwendet man zwei Materialien.
Mit einem Bleikern und einem Stahlmantel (siehe Aufgabe 3) kann man offensichtlich alle Kugeldurchmesser von 11,0cm bis 12,1 cm realisieren.

Geometrie-Aufgabe zum Kugelstoßen * Lösungen * Aufgabe 2

Es gilt: $m = \varrho \cdot V = \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \varrho$

Bleikugel mit r = 5,5cm: $m = \frac{4}{3} \cdot (5{,}5\text{cm})^3 \cdot \pi \cdot 11{,}35\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 7{,}910\text{ kg}$

Stahlkugel mit r = 5,5cm: $m = \frac{4}{3} \cdot (5{,}5\text{cm})^3 \cdot \pi \cdot 7{,}86\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 5{,}478\text{ kg}$

Stahlkugel mit r = 6,5cm: $m = \frac{4}{3} \cdot (6{,}5\text{cm})^3 \cdot \pi \cdot 7{,}86\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 9{,}042\text{ kg}$

Geometrie-Aufgabe zum Kugelstoßen * Lösungen * Aufgabe 3

Bezeichnungen (auch für die nachfolgenden Aufgaben):
$r = r_1 + x = 5{,}75\text{ cm}$; $\varrho_{\text{Blei}} = \varrho_1$; $\varrho_{\text{Stahl}} = \varrho_2$; $\Delta\varrho = \varrho_1 - \varrho_2 = 3{,}49\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$$m = \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi \cdot \varrho_1 + \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \varrho_2 - \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi \cdot \varrho_2 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \varrho_2 + \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi \cdot \Delta\varrho$$

nach r_1 aufgelöst: $r_1 = \sqrt[3]{\frac{m - \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \varrho_2}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \Delta\varrho}} = \ \dots \ = 4{,}09\text{ cm}$

und damit $x = 5.75\text{ cm} - 4{,}09\text{ cm} = 1{,}66\text{ cm}$

Geometrie-Aufgabe zum Kugelstoßen * Lösungen * Aufgabe 4

Jetzt gilt $m_1 = m_2 = 7,257\ \text{kg} : 2 = 3,6285\ \text{kg}$

Wie in Aufgabe 1 gilt nun $r_1 = \sqrt[3]{\frac{3\, m_1}{4\pi\ \varrho_1}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3628,5\ \text{g}}{4 \cdot \pi \cdot 11,35\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = 4,24\ \text{cm}$

Aus $m_2 = \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \varrho_2 - \frac{4}{3} r_1^3 \pi \cdot \varrho_2$ mit $r = r_1 + x$ folgt

$r = \sqrt[3]{\frac{3\ m_2}{4\ \pi\ \varrho_2} + r_1^3} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3628,5\ \text{g}}{4 \cdot \pi \cdot 7,86\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} + (4,24\ \text{cm})^3} = 5,71\ \text{cm}$; $x = 1,47\,\text{cm}$

Mit einem Durchmesser von 11,42 cm ist diese Kugel für den Wettkampf geeignet.

Geometrie-Aufgabe zum Kugelstoßen * Lösungen * Aufgabe 5

Jetzt gilt $V_1 = V_2$ und $m_1 + m_2 = m = 7257\ \text{g}$

wegen $m = \varrho \cdot V$ folgt $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{1135}{786}$ und damit

$m_1 = \frac{1135}{1135 + 786} \cdot 7257\ \text{g} = 4288\ \text{g}$ und $m_2 = 7257\ \text{g} - 4288\ \text{g} = 2969\ \text{g}$

Wie in Aufgabe 1 gilt nun $r_1 = \sqrt[3]{\frac{3\, m_1}{4\pi\ \varrho_1}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 4288\ \text{g}}{4 \cdot \pi \cdot 11,35\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = 4,48\ \text{cm}$

Wie in Aufgabe 4 folgt nun für $r = r_1 + x$

$r = \sqrt[3]{\frac{3\ m_2}{4\ \pi\ \varrho_2} + r_1^3} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2969\ \text{g}}{4 \cdot \pi \cdot 7,86\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} + (4,48\ \text{cm})^3} = 5,65\ \text{cm}$

$x = 1,17\ \text{cm}$ und $d = 2\,r = 11,3\ \text{cm}$

Mit einem Durchmesser von 11,3 cm ist auch diese Kugel für den Wettkampf geeignet.