Logarithmen * Umkehrung von Rechenarten * Jahrgangsstufe 10

Berechnung des Tangens

$x = \tan(45^o)$ d.h. $x = 1$

$x = \tan(60^o)$ d.h. $x = \sqrt{3}$

$x = \tan(23.5^o)$ $x = 0{,}434812...$ (TR)

Berechnung des Inverstangens (Arcustangens)

$\tan(\alpha) = 1$ d.h. $\alpha = 45^o$

$\tan(\alpha) = \sqrt{3}$ d.h. $\alpha = 60^o$

$\tan(\alpha) = 0{,}43$ d.h. $\alpha = \operatorname{inv}\tan(0{,}43)$
$= \arctan(0{,}43) =$
$= 23{,}26770481...^o$

Man sagt: **Tangens und Arcustangens sind Umkehrfunktionen zueinander.
Die Berechnung des Arcustangens ist die Umkehrung zur Berechnung des Tangens.
Tangens und Arcustangens (INV-Tangens) können bequem mit dem Taschenrechner (TR) berechnet werden.**

Quadrieren

$x = 3^2$ d.h. $x = 9$

$x = 5{,}4^2$ d.h. $x = 29{,}16$

$x = \pi^2$ d.h. $x = 9{,}869604...$

Ziehen der Quadratwurzel

$x^2 = 9$ d.h. $x_{1/2} = \pm 3$

$x^2 = 29{,}16$ d.h. $x_{1/2} = \pm\sqrt{29{,}16}$
$= \pm 5{,}4$

$x^2 = \pi$ d.h. $x_{1/2} = \pm\sqrt{\pi}$
$= \pm 1{,}7724...$

Man sagt: **Das Ziehen der Quadratwurzel ist die Umkehrung zum Quadrieren.
Quadratzahlen und Quadratwurzeln können bequem mit dem Taschenrecher berechnet werden.**

Potenzieren

$x = 2{,}5^3$ d.h. $x = 15{,}625$

$x = 2{,}5^{3{,}2}$ d.h. $x = 18{,}767569...$

$x = 3^\pi$ d.h. $x = 31{,}5442807...$

Ziehen einer Wurzel
(Berechne die Basis einer Potenz)

$x^3 = 15{,}625$ d.h. $x = \sqrt[3]{15{,}625} =$
$= 2{,}5$

$x^{3{,}2} = 18$ d.h. $x = \sqrt[3{,}2]{18} =$
$= 2{,}467588...$

$x^\pi = 32$ d.h. $x = \sqrt[\pi]{32} =$
$= 3{,}0137284...$

Man sagt: **Potenzieren mit der Hochzahl e und Ziehen der e-ten Wurzel sind Umkehrrechnungen zueinander.
Potenzen mit dem Exponenten e und e-te Wurzeln lassen sich mit demTaschenrechner bequem berechnen.**

$x^e = y$ und $x = \sqrt[e]{y}$ sind also äquivalente Gleichungen.

Potenzieren

$x = 2^3$ d.h. $x = 8$

$x = 4^{0,5}$ d.h. $x = \sqrt{4} = 2$

$x = 2,5^{1,5}$ d.h. $x = 3,952847075...$

Logarithmieren
(Berechne den Exponenten einer Potenz)

$2^x = 8$ man schreibt dafür:
$x = \log_2(8) = 3$

$4^x = 2$ man schreibt dafür:
$x = \log_4(2) = 0,5$

$2,5^x = 3,9$ man schreibt dafür:
$x = \log_{2,5}(3,9) = 1,485310836...$

Merke

Eine Gleichung, bei der die Variable im Exponenten einer Potenz auftritt, heißt
Exponentialgleichung ($b^x = a$)

$b^e = a$ ist äquivalent zu $e = \log_b(a)$

Man nennt $\log_b(a)$ den Logarithmus von a zur Basis b .
$\log_b(a)$ ist also der Exponent, mit dem man b potenzieren muss, um a zu erhalten.
Für b und a sind dabei nur positive Zahlen erlaubt!

Logarithmen zur Basis 10 kann man mit dem Taschenrechner bequem berechnen („log”).
Statt $\log_{10}(a)$ schreibt man nur kurz lg (a).

Aufgaben:

Löse Sie die Exponentialgleichung durch Logarithmieren und bestimme den Wert des Logarithmus!
Beispiel:

$$2^x = 32 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_2(32) \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

1\. a) $2^x = 16$ b) $2^x = 1$ c) $2^x = \sqrt{2}$

b) $2^x = \frac{1}{8}$ d) $2^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $2^x = 0,25 \cdot \sqrt[3]{2}$

2\. a) $10^x = 1000$ b) $10^x = 0,0001$ c) $10^x = 10\,000\,000\,000$

3\. Berechne die Zehnerlogarithmen mit dem Taschenrechner! Was fällt auf?
a) lg (50) b) lg (8) c) lg (80) d) lg (8000) e) lg (0,08)

Rechnung und Umkehrrechnung heben sich bei Hintereinanderausführung in ihrer Wirkung auf.
Es gilt deshalb z.B.

$\tan(\arctan(x)) = x$ und $\arctan(\tan(\alpha)) = \alpha$

$\sqrt[3]{x^3} = x$ und $(\sqrt[3]{x})^3 = x$

Entsprechend gilt auch für Logarithmen:

$$b^{\log_b(a)} = a \quad \text{und} \quad \log_b(b^a) = a$$

(Beachte: $\log_b(a)$ ist der Exponent, mit dem man b potenzieren muss, um a zu erhalten.)

Für Logarithmen gelten einfache Rechengesetze.
Diese Rechengesetze folgen aus den entsprechenden Rechengesetzen für Potenzen.

Merke:

(1) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$

(2) $\log_b(x : y) = \log_b(x) - \log_b(y)$

(3) $\log_b(x^r) = r \cdot \log_b(x)$

(4) $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Beweis von (1) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$:

Schreibe $e = \log_b(x)$; $f = \log_b(y)$; d.h. $b^e = x$ und $b^f = y$
$x \cdot y = b^e \cdot b^f = b^{e+f} \Leftrightarrow e + f = \log_b(x \cdot y) \Leftrightarrow$ Beh.

Aufgaben:

4. Beweisen Sie die restlichen Logarithmus-Gesetze!
5. Schätzen Sie erst den Wert der folgenden Logarithmen und berechnen Sie diesen dann mit dem TR! (Nutzen Sie dabei das letzte der angegebenen Logarithmus-Gesetze!)
   a) $\log_{3,2}(14,62)$ b) $\log_{\sqrt{3}}(1,012)$ c) $\log_{0,4}(17)$
   d) $\log_3(0,99)$ e) $\log_{\pi}(0,3)$ f) $\log_5(4,2)$
6. Löse die Gleichung: $\lg(2x + 12) - \lg(x - 8) = 1$

Anwendungen:

Rechenstab bzw. Rechenschieber

Die Rechengesetze (1), (2) und (3) für Logarithmen ermöglichen das näherungsweise Multiplizieren und Dividieren zweier Zahlen sowie das Quadrieren und Wurzelziehen einer Zahl mit Hilfe des Rechenschiebers (vgl. Buch S. 174 f).
Statt z.B. zwei Zahlen zu multiplizieren werden lediglich die Logarithmen dieser Zahlen addiert.

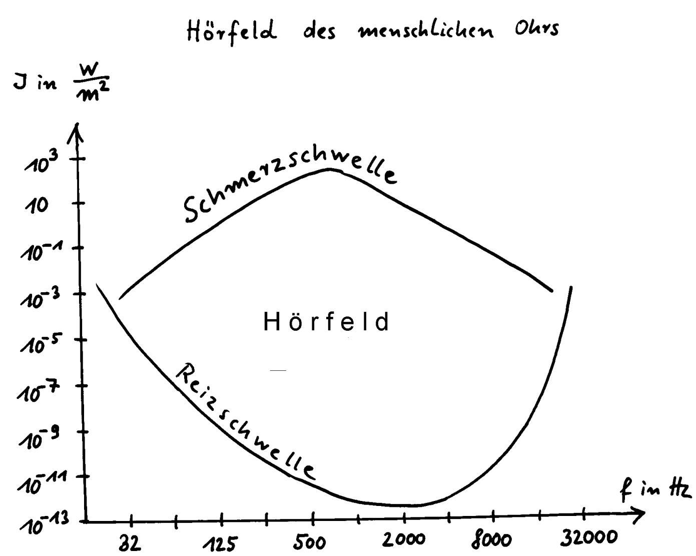
Logarithmische Skalen

Logarithmische Skalen werden in der Technik, der Physik, der Chemie, ... immer gerne dann verwendet, wenn eine Größe über viele Zehnerpotenzen hinweg beobachtet werden kann.
Das abgebildete Diagramm zeigt das sogenannte Hörfeld des gesunden menschlichen Ohres in Abhängigkeit von der Frequenz. Dieses Hörfeld liegt zwischen den beiden Kurven, der sog. **Reizschwelle** (untere Kurve) und der sog. **Schmerzschwelle** (obere Kurve).
Die Stärke des Schalls wird hierbei physikalisch durch die Schallintensität J (gemessen in W/m^2) angegeben. Man erkennt am Diagramm, dass das menschliche Ohr einen Ton von 2000 Hz in dem riesigen Schallintensitätsbereich von $10^{-13}\, W/m^2$ bis zu $10\, W/m^2$ wahrnehmen kann. (Das sind 14 Zehnerpotenzen!!!)
Erstaunlich ist hierbei, dass jeweils eine Verzehnfachung der Schallintensität als gleich starke Erhöhung der **Lautstärke** empfunden wird. Man legt deshalb fest:

Laustärke in Phon $= \mathbf{10} \cdot \lg\left(\frac{J}{J_o}\right)$; wobei J_o die Schallintensität der Reizschwelle ist.

Beispiele:

0 Phon = Schwellenlautstärke
10 Phon = leises Flüstern
20 Phon = Flüstersprache
40 Phon = Unterhaltungssprache
50 Phon = Lautsprecher (Zimmerlautstärke)
70 Phon = Büroschreibmaschinen
80 Phon = starker Straßenverkehr
100 Phon = Motorrad, Autohupe nah
110 Phon = Presslufthammer
120 Phon = Voll-Lauf Flugmotor in 4m Abstand
130 Phon = Lärm in Kesselschmiede
Schmerzschwelle



Aufgabe.

6. Um wie viel ist die Schallintensität eines Presslufthammers größer als die von Büroschreibmaschinen bzw. von Unterhaltungssprache?
7. Wie viele Lautsprecher (Zimmerlautstärke) erzeugen die Schallintensität eines Presslufthammers bzw. eines Flugmotors in 4m Abstand?

Eine weitere wichtige Anwendung in der Chemie: pH-Wert

(Angabe der Wasserstoff-Ionen-Konzentration durch negativen dekadischen Logarithmus)