

Mathematik * Anwendungsaufgaben zur Ableitung einer Funktion

Physik

Für die Geschwindigkeit v eines Körpers gilt: $v(t_o) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_o}{t_1 - t_o}$

Mit mathematischer Grenzwertbildung folgt: $v(t_o) = \lim_{t_1 \rightarrow t_o} \frac{x_1 - x_o}{t_1 - t_o} = \frac{d x}{d t}(t_o) = \dot{x}(t_o)$

$\dot{x}(t_o)$ gibt dabei die Ableitung der Orts-Funktion $x = x(t)$ nach der Zeit t an.

Entsprechend gilt für die Beschleunigung a dieses Körpers:

$a(t_o) \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_o}{t_1 - t_o}$ und damit $a(t_o) = \lim_{t_1 \rightarrow t_o} \frac{v_1 - v_o}{t_1 - t_o} = \frac{d v}{d t}(t_o) = \dot{v}(t_o) = \ddot{x}(t_o)$

$\ddot{x}(t_o)$ gibt dabei die zweite Ableitung der Orts-Funktion $x = x(t)$ an.

Mit dem zweiten newtonschen Gesetz gilt also: $F(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \dot{v}(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$

1. a) Begründen Sie, dass für eine Bewegung (in x-Richtung) mit der konstanten Beschleunigung a (in x-Richtung) die Ortsfunktion $x = x(t)$ folgendermaßen lautet:

$$x = x(t) = x_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2. \quad \text{Welche Bedeutung haben dabei } x_o \text{ und } v_o ?$$

- b) Ein Ball der Masse 500g wird mit der Anfangsgeschwindigkeit 15 ms^{-1} nach oben geworfen. Welche Höhe und Geschwindigkeit hat der Ball nach 1,0s? Welche maximale Höhe erreicht er und wann schlägt er wieder am Boden auf? ($g = 10 \text{ ms}^{-2}$)
- c) Ein Ball der Masse 500g wird mit der Anfangsgeschwindigkeit 15 ms^{-1} waagrecht aus einer Höhe von 20m über dem Boden abgeworfen. Welche Höhe und Geschwindigkeit hat der Ball nach 1,0s? Wo schlägt der Körper wann mit welcher Geschwindigkeit auf? Welche Bahnkurve beschreibt der Ball?
2. Die Auslenkung y eines Federpendels, das mit der Amplitude $A = 5,0 \text{ cm}$ und der Schwingungsdauer $T = 3,0 \text{ s}$ schwingt, lautet

$$y(t) = 5,0 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3,0 \text{ s}} \cdot t\right).$$

- a) Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit nach „oben“. Wann tritt diese Geschwindigkeit jeweils auf?
- b) Bestimmen Sie zum Zeitpunkt $t_1 = 2,6 \text{ s}$ die Auslenkung $y(t_1)$, die Geschwindigkeit $v(t_1)$ und die Beschleunigung $a(t_1)$.
- c) Welche maximale Beschleunigung erfährt der Pendelkörper? Bei welcher Auslenkung tritt diese maximale Beschleunigung auf?

Wirtschaft

3. Die Herstellungskosten einer Anzahl x gleicher Geräte wird durch die Kostenfunktion $K(x)$ beschrieben. Es gelte z.B.

$$K(x) = (0,0015 x^3 - 1,8 x^2 + 820 x + 5000) \text{ DM}$$

- a) Überlegen Sie, welche Kosten durch jeden einzelnen der in $K(x)$ auftretenden Terme beschrieben wird. (Vorzeichen beachten!)
- b) Die Ableitung $K'(x)$ wird Grenzkostenfunktion genannt. Begründen Sie, dass $K'(x)$ angenähert angibt, welche Kosten für die Herstellung des Geräts mit der Nummer $x+1$ anfallen.
- c) Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktion für unser Beispiel. Für welche Anzahl x ergeben sich die kleinsten Grenzkosten?
- d) Für welche Anzahl an hergestellten Geräten liegen die Grenzkosten unter 150DM?