1. Probe zur reellen Analysis in Jahrgangsstufe 11

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3\cdot\sqrt{x^2 - 4}$.

   a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f und alle Nullstellen von f . Ist der Graph von f symmetrisch?

   Die Funktion g ist die Einschränkung von f auf das Intervall $]-\infty\,;-3]$.

   b) Zeigen Sie, dass g streng monoton fallend ist. Geben Sie den Wertebereich W_g von g an.

   c) Als streng monoton fallende Funktion ist g umkehrbar. Bestimmen Sie den Funktionsterm $g^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion g^{-1} . Geben Sie auch den Definitionsbereich von g^{-1} an.

2. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion h mit der Funktionsgleichung

   $h(x) = \dfrac{-3}{4x^2+5}$ *und* $D_h = R_o^-$. (Ausführliche Rechenschritte sind gefordert!)

Lösung:

1. a) $D_f:\ x^2-4\ge 0 \iff x^2\ge 4 \iff x\le -2\ oder\ x\ge 2$

   $d.h.\ D_f =]-\infty;-2]\cup[\,2\,;\infty\,[\ = \ R\setminus]-2;\,2\,[$

   NSt.: $f(x)=0 \iff x^2-4=0 \iff x_{1/2}=\pm\,2$

   Symmetrie: $f(-x)=f(x)$, $d.h.\ G_f$ *ist achsensymmetrisch zur* $y-Achse$.

   b) $x_1 < x_2 \le -3 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \ge 9 \Rightarrow x_1^2-4 > x_2^2-4 \ge 5 \Rightarrow$

   $\sqrt{x_1^2-4} > \sqrt{x_2^2-4} \ge \sqrt{5} \Rightarrow 3\cdot\sqrt{x_1^2-4} > 3\cdot\sqrt{x_2^2-4} \ge 3\cdot\sqrt{5} \Rightarrow$

   $g(x_1) > g(x_2) \ge 3\cdot\sqrt{5} \Rightarrow$ *g ist streng monoton fallend mit* $W_g = [3\cdot\sqrt{5};\infty[$.

   c) $g^{-1}:\quad x = 3\cdot\sqrt{y^2-4} \iff \left(\dfrac{x}{3}\right)^2 = y^2-4 \iff y^2 = 4+\dfrac{x^2}{9} \iff$

   $$y = \overset{(+)}{-}\sqrt{4+\frac{x^2}{9}} = -\frac{1}{3}\sqrt{36+x^2} \quad \text{wegen} \quad W_{g^{-1}} = D_g =]-\infty\,;-3]$$

   also $g^{-1}(x) = -\dfrac{1}{3}\sqrt{36+x^2}$ *mit* $D_{g^{-1}} = W_g = [3\cdot\sqrt{5}\,;\infty[$.

2. Für $0\le x_1 < x_2$ *gilt* $0 \le x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow 0 \le 4x_1^2 < 4x_2^2 \Rightarrow$

   $$5 \le 4x_1^2+5 < 4x_2^2+5 \Rightarrow \frac{1}{4x_1^2+5} > \frac{1}{4x_2^2+5} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{4x_1^2+5} < \frac{-3}{4x_2^2+5} < 0$$

   $\Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$ also ist h in $R_o^+ = [\,0\,;\infty\,[$ streng monoton fallend.

   Wegen der Achsensymmetrie von G_f ($h(-x)=h(x)$) ist h in $R_o^- =]-\infty\,;0\,]$ streng monoton steigend.