Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * Kurven von Hoch- und Tiefpunkten

1. Bestimmen Sie die Kurve aller Tiefpunkt der Schar $f_a(x) = x^3 - a\,x^2 + a$ mit $a \in R^+$.
   Zeigen Sie, dass der Tiefpunkt $T(1/1)$ für $a = 1{,}5$ am höchsten liegt.

   Überprüfen Sie Ihre Rechenergebnisse mit geeigneter Software.

2. Bestimmen Sie die Kurve aller Hochpunkte der Schar $f_a(x) = \dfrac{x^2 + a\,x - 2}{a - 1}$ mit $a \in R^-$.

   Gibt es einen Hochpunkt, der am höchsten bzw. am tiefsten liegt?

   Überprüfen Sie Ihre Rechenergebnisse mit geeigneter Software.

3. Bei einer Kurvenschar f_t mit $t \in R^-$ erhält man die Hochpunkte $HOP\left(\dfrac{2-t}{3} \,/\, \dfrac{2+t}{t^2}\right)$.
   Bestimmen Sie die Kurve der Hochpunkte und prüfen Sie, ob es unter diesen Hochpunkten einen höchsten bzw. tiefsten gibt.

   Überprüfen Sie Ihre Rechenergebnisse mit geeigneter Software.

4. Bei einer Kurvenschar f_k mit $k \in R_o^+$ erhält man die Tiefpunkte $TIP(k^2 + 2k \,/\, 1 + k)$.
   Bestimmen Sie die Kurve der Tiefpunkte und prüfen Sie, ob es unter diesen Tiefpunkten einen höchsten bzw. tiefsten gibt.

   Überprüfen Sie Ihre Rechenergebnisse mit geeigneter Software.

Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * Kurven von Hoch- und Tiefpunkten
Lösungen

1. $f_a(x) = x^3 - a x^2 + a \quad \text{mit} \ a \in R^+$

   $f_a'(x) = 3x^2 - 2ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = \frac{2}{3}a$

   $HOP(0/a) \quad ; \quad TIP(\frac{2}{3}a \ ; \ a - \frac{4}{27}a^3)$

   Kurve der Tiefpunkte $t(x) = 1{,}5x - 0{,}5x^3$ mit $x \in R^+$

   $t'(x) = 1{,}5 - 1{,}5x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/(2)} = \pm 1 \quad [x_2 = -1 \notin D_t]$

   Der Tiefpunkt T (1 / 1) liegt am höchsten.

2. $f_a(x) = \frac{x^2 + ax - 2}{a - 1} \quad \text{mit} \ a \in R^-$

   $f_a'(x) = \frac{2x + a}{a - 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{a}{2} \quad ; \quad y_1 = \frac{8 + a^2}{4 - 4a} \qquad HOP(-\frac{a}{2} \ ; \ \frac{8 + a^2}{4 - 4a})$

   Kurve der Hochpunkte $h(x) = \frac{2 + x^2}{1 + 2x}$ mit $x \in R^+$

   $h'(x) = \frac{x^2 + x - 2}{2(1 + 2x)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1 \quad (x_2 = -2 \notin D_t)$

   HOP (1 ; 1) ist der tiefste Hochpunkt, denn $h'(x)$ ändert bei $x_1 = 1$ das Vorzeichen von - auf + .

3. $HOP(\frac{2-t}{3} \ / \ \frac{2+t}{t^2})$ Kurve der Hochpunkte $h(x) = \frac{4 - 3x}{(2 - 3x)^2}$ mit $x \in \ ] \frac{2}{3} ; \infty [$

   $h'(x) = \frac{-9x + 18}{(2 - 3x)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2 \ ; \ y_1 = -\frac{1}{8} \qquad HOP(2 \ ; \ -\frac{1}{8})$ liegt am tiefsten.

4. Kurve der Tiefpunkte $t(x) = \sqrt{x + 1}$ mit $x \in R_o^+$

   Tiefster Tiefpunkt für $k = 0$, d.h. $x_1 = 0$, nämlich TIP(0;1)