Definition eines (Zahlen-)Körpers

Eine Menge **K** heißt **Körper**, wenn auf K zwei Verknüfungen (+ „Addition" und $\cdot$ „Multiplikation") mit folgenden Eigenschaften definiert sind:

(1) K ist bezüglich der Addition eine **kommutative Gruppe**, d.h.

a) Zwei beliebigen Elementen $a, b \in K$ ist genau ein Element $a + b \in K$ zugeordnet.

b) K enthält ein **neutrales Element 0** bezüglich der Addition, d.h. für jedes $a \in K$ gilt $a + 0 = a$.

c) Zu jedem $a \in K$ gibt es bezüglich der Addition ein **inverses Element** $(- a)$, d.h. $a + (- a) = 0$.

d) Es gilt das **Assoziativgesetz**, d.h. für alle $a, b, c \in K$ gilt $a + (b + c) = (a + b) + c$.

e) Es gilt das **Kommutativgesetz**, d.h. für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.

(2) Die Menge **K \ { 0 }** ist bezüglich der Multiplikation eine **kommutative Gruppe**, d.h.

a) Zwei beliebigen Elementen $a, b \in K \setminus \{0\}$ ist genau ein Element $a \cdot b \in K \setminus \{0\}$ zugeordnet.

b) $K \setminus \{0\}$ enthält ein **neutrales Element 1** bezüglich der Multiplikation, d.h. für jedes $a \in K \setminus \{0\}$ gilt $a \cdot 1 = a$.

c) Zu jedem $a \in K \setminus \{0\}$ gibt es bezüglich der Multiplikation ein **inverses Element** $(\frac{1}{a})$, d.h. $a \cdot (\frac{1}{a}) = 1$.

d) Es gilt das **Assoziativgesetz**, d.h. für alle $a, b, c \in K \setminus \{0\}$ gilt $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

e) Es gilt das **Kommutativgesetz**, d.h. für alle $a, b \in K \setminus \{0\}$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.

(3) Die Addition und die Multiplikation sind durch das **Distributivgesetz** miteinander verbunden, d.h. für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Hinweis: Aus der Definition folgt, dass für jedes $a \in K$ der Ausdruck $a \cdot 0$ definiert ist und $a \cdot 0 = 0$ gilt.

Ein Körper K heißt **angeordnet**, wenn folgende Axiome gelten:

(1) Für alle $a, b \in K$ ist genau eine der drei Relationen richtig: Entweder $a > b$ oder $a = b$ oder $a < b$.

(2) Die Ordnung ist **transitiv**, d.h. für $a, b, c \in K$ gilt: aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

(3) Es gilt die **Monotonie der Addition**, d.h. für $a, b, c \in K$ gilt: aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$.

(4) Es gilt die **Monotonie der Multiplikation**, d.h. für für $a, b, c \in K$ und $c > 0$ gilt: aus $a < b$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$.

Die **rationalen Zahlen Q** und die **reellen Zahlen R** sind nach der oben angegebenen Definition **angeordnete Körper** (angeordnete Zahlenkörper).

Der Körper der reellen Zahlen ist im Gegensatz zum Körper der rationalen Zahlen Q ein sogenannter **vollständiger** Zahlenkörper, d.h jede Intervallschachtelung mit reellen Zahlen als Intervallgrenzen legt eine Zahl fest, die selbst schon aus der Menge der reellen Zahlen stammt.

G.R.