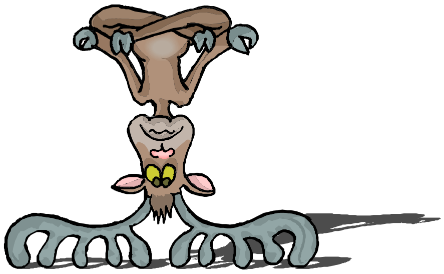
Eine erste so genannte „Kurvendiskussion“



Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$
soll mit möglichst geringem Rechenaufwand gezeichnet werden.

Bestimmen Sie dazu den Definitionsbereich, alle Nullstellen, das Verhalten für $x \to \pm\infty$ und prüfen Sie auf Symmetrie.
Mit Hilfe der Ableitungsfunktion können Sie alle Stellen mit horizontaler Tangente (und damit so genannte „Hochpunkte“ bzw. „Tiefpunkte“) ermitteln.
Welche Aussagen können Sie nun über den Wertebereich und die Monotonie der Funktion machen?

Übertragen Sie alle Rechenergebnisse jeweils gleich in Ihre graphische Darstellung der Funktion.
Prüfen Sie nach Fertigstellung Ihrer Zeichnung mit geeigneter Software, wie gut Ihr Graph gelungen ist!

Lösung zur ersten so genannten „Kurvendiskussion“:

$f(x) = x^4 - 2x^2 - 8 \quad ; \quad D_f = R$

$f(-x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad G_f \text{ ist achsensymmetrisch zur } y-\text{Achse.}$

$\text{Nullstellen: Substitution } x^2 = u$

$u^2 - 2u - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u-4)\cdot(u+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = 4 \;\; ; \; (u_2 = -2 \text{ liefert keine Lösung für } x!)$

$\text{Nullstellen: } x_{1/2} = \pm 2$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 \cdot \left(1 - \frac{2}{x^2} - \frac{8}{x^4}\right) = +\infty\cdot(1-0-0) = +\infty$$

$f'(x) = 4x^3 - 2x \quad ; \quad \text{horizontale Tangenten für } f'(x) = 0$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x\cdot(x^2-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 0 \;\; ; \;\; x_{4/5} = \pm 1$

Nach den Nullstellen und den Grenzewerten für $x \to \pm\infty$
gibt es zwei Tiefpunkte und einen Hochpunkt.

$\text{Hochpunkt } HOP(0/\, f(0)) = (0/-8)$

$\text{Tiefpunkte: } TIP_1(-1/\, f(-1)) = (-1/-9) \;\; ; \; TIP_2(1/\, f(1)) = (1/-9)$

$\text{Wertebereich } W_f = [-9\,;\infty[$

$f \text{ ist in } [-1;0] \text{ und in } [1;\infty[\text{ streng monoton steigend.}$

Graph von f :