Aufgaben zu Kurvenscharen

Führen Sie jeweils die Diskussion der Kurvenschar durch und skizzieren Sie „typische Graphen“ der Schar. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Kurven, auf denen Hoch-, Tief- oder Wendepunkte der Schar liegen.
Prüfen Sie zum Schluss Ihre Ergebnisse mit geeigneter Software.

1. $f_k(x) = x^2 - kx + 1 \qquad k \in R$

2. $f_k(x) = x^2 + kx \qquad k \in R^+$

3. $f_k(x) = kx^2 - \frac{1}{k}x \qquad k \in R^+$

4. $f_k(x) = kx^2 + (k+1)x \qquad k \in R^+$

5. $f_k(x) = x^3 + kx^2 \qquad k \in R$

6. $f_k(x) = x^3 + kx^2 + x \qquad k \in R_o^+$

7. $f_k(x) = \frac{kx}{k + x^2} \qquad k \in R^+$

8. $f_k(x) = \frac{10x(2k - x)}{1 + k^3} \qquad k \in R^+$

Aufgaben zu Kurvenscharen * Lösungen

1. *Für* $k=2$ *doppelte Nullstelle bei* $x=1$; *für* $k=-2$ *doppelte Nullstelle bei* $x=-1$
für $k>2$ *bzw.* $k<-2$ *zwei Nullstellen bei* $x_{1/2}=0{,}5\cdot(k\pm\sqrt{k^2-4})$
Tiefpunkt: $TIP(\frac{k}{2}/\,1-\frac{k^2}{4})$; *Kurve der Tiefpunkte*: $y=1-x^2$ *mit* $x\in R$

2. Nullstellen: $x_1=-k$; $x_2=0$
Tiefpunkt: $TIP(-\frac{k}{2}/-\frac{k^2}{4})$; *Kurve der Tiefpunkte*: $y=-x^2$ *mit* $x\in R^-$

3. Nullstellen: $x_1=0$; $x_2=\frac{1}{k^2}$
Tiefpunkt: $TIP(\frac{1}{4k^2}/-\frac{3}{16k^3})$; *Kurve der Tiefpunkte*: $y=-1{,}5\cdot x\cdot\sqrt{x}$ *mit* $x\in R^+$

4. Nullstellen: $x_1=0$; $x_2=-1-\frac{1}{k}$ Tiefpunkt: $TIP(-\frac{k+1}{2k}/-\frac{(k+1)^2}{4k})$
Kurve der Tiefpunkte: $y=\frac{x^2}{1+2x}$ *mit* $x\in\,]-\infty\,;-\frac{1}{2}[$

5. Nullstellen : $x_{1/2}=0$; $x_3=-k$ für k = 0 Terrassenpunkt TP(0/0)
für k > 0 : $TIP(0/0)$; $HOP(-\frac{2k}{3}/\frac{4k^3}{27})$ Kurve der HOP: $y=-\frac{1}{2}x^3$ *mit* $x\in R^-$
für k < 0 : $TIP(-\frac{2k}{3}/\frac{4k^3}{27})$; $HOP(0/0)$ Kurve der TIP: $y=-\frac{1}{2}x^3$ *mit* $x\in R^+$
für alle k : Wendepunkt $WP(-\frac{k}{3}/\frac{2k^3}{27})$ Kurve der WP: $y=-2x^3$ *mit* $x\in R$

6. *für* $0\le k<2$ *gibt es genau eine NSt.* $x_1=0$
für $k=2$ *gibt es zwei NSt.* $x_1=0$; $x_2=-1$
für $k>2$ *gibt es drei NSt.* $x_1=0$; $x_{2/3}=\frac{1}{2}(-k\pm\sqrt{k^2-4})$
für $k>\sqrt{3}$ *gibt es* $HOP(\frac{1}{3}(-k-\sqrt{k^2-3}\,/\,...)$ *und* $TIP(\frac{1}{3}(-k+\sqrt{k^2-3}\,/\,...)$
für $k=\sqrt{3}$ *gibt es Terrassenpunkt* $TP(-\frac{\sqrt{3}}{3}/-\frac{\sqrt{3}}{9})$
für alle $k\in R_o^+$ *Wendepunkt* $WP(-\frac{k}{3}/\frac{2k^3}{27}-\frac{k}{3})$
Kurve der WP: $y=-2x^3+x$ *mit* $x\in R_o^-$

7. Nullstellen: $x_1 = 0$

Hochpunkte: $HOP(\sqrt{k} \;/\; \frac{\sqrt{k}}{2})$; $Kurve\ der\ Hochpunkte: \ y = \frac{1}{2}x \ \ mit \ \ x \in R^+$

Tiefpunkte: $TIP(-\sqrt{k} \;/\; -\frac{\sqrt{k}}{2})$; $Kurve\ der\ Hochpunkte: \ y = \frac{1}{2}x \ \ mit \ \ x \in R^-$

8. Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = 2k$

Hochpunkt: $HOP(k \;/\; \frac{10k^2}{1+k^3})$; $Kurve\ der\ Hochpunkte: \ y = \frac{10x^2}{1+x^3} \ \ mit \ \ x \in R^+$