2. Schulaufgabe aus der Mathematik, Klasse 11c, 24.01.2005

1. Berechnen Sie – falls vorhanden – folgende Grenzwerte.
   Geben Sie gegebenenfalls den links- und rechtsseitigen Grenzwert an!

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(3x^2+2)^2}{2-3x^2-4x^4}$ b) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3+1}{x^4-1}$

   c) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x^2-8}{6+x-x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(2-x^2)\cdot\sin(4x)}{x^3-3x}$

2. Zeigen Sie mit exaktem Nachweis (ε-δ-Methode), dass die Funktion f stetig ist.
   $f(x) = 2 - 3x$

3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{(x^2+b\cdot x+c)\cdot \operatorname{sgn}(1-x)}{2x+4}$.

   a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f an und schreiben Sie f(x) abschnittsweise ohne Verwendung der sgn-Funktion.

   b) Zunächst soll die Funktion f für b = c = 1 untersucht werden.
      Zeigen Sie, dass f nicht stetig ist! Geben Sie dazu alle Stellen an, an denen f nicht stetig ist und begründen Sie das.

   c) Bestimmen Sie die Werte der Parameter b und c so, dass f nicht nur stetig wird sondern sich sogar noch stetig auf R fortsetzen lässt.
      Geben Sie diese stetige Fortsetzung von f an.

4. Das Polynom $p(z) = z^3 - 3i\cdot z^2 + 13\cdot z - 15i$ mit Koeffizienten aus C soll faktorisiert werden.

   a) Zeigen Sie, dass $z_1 = i$ eine Nullstelle des Polynoms p ist.

   b) Bestimmen Sie alle restlichen Nullstellen des Polynoms und faktorisieren Sie dann p(z) vollständig.

Gutes Gelingen! G.R.

Aufgabe	1a	b	c	d	2	3a	b	c	4a	b	Σ
Punkte	3	2	3	3	6	4	3	6	3	10	43

Lösung:

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(3x^2+2)^2}{2-3x^2-4x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9x^4+12x^2+4}{2-3x^2-4x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{9+\frac{12}{x^2}+\frac{4}{x^4}}{\frac{2}{x^4}-\frac{3}{x^2}-4} = -\dfrac{9}{4} = -2,25$

b) $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1 \\ <}} \dfrac{x^3+1}{x^4-1} = \text{"}\dfrac{1+1}{0^{\pm}}\text{"} = \pm\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x^2-8}{6+x-x^2} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2(x-2)\cdot(x+2)}{(3-x)\cdot(2+x)} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2(x-2)}{(3-x)} = \dfrac{2\cdot(-4)}{3+2} = -\dfrac{8}{5} = -1,6$

d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(2-x^2)\cdot\sin(4x)}{x^3-3x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{(2-x^2)\cdot}{(x^2-3)\cdot\frac{1}{4}}\cdot\dfrac{\sin(4x)}{4x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{(2-x^2)\cdot4}{(x^2-3)}\cdot\dfrac{\sin(4x)}{4x} =$

$= \dfrac{2\cdot4}{-3}\cdot1 = -\dfrac{8}{3}$

2. Für beliebiges $x_o \in D_f = R$ zeigen wir:

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$, *so dass für alle* x *mit* $|x-x_o|<\delta$, $x\neq x_o$ *gilt*:

$|\,f(x)-f(x_o)\,| = |\,2-3x-2+3x_o| = |3(x_o-x)| = 3\cdot|x-x_o| < 3\cdot\delta = 3\cdot\dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Das bedeutet: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$ für jedes $x_o \in D_f = R$.

F ist damit stetig in jedem $x_o \in D_f = R$ und daher insgesamt stetig.

3. a) $D_f = R\setminus\{-2\}$ und $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-(x^2+bx+c)}{2x+4} & ;\ x>1 \\ 0 & ;\ x=1 \\ \dfrac{x^2+bx+c}{2x+4} & ;\ x<1\ \textit{und}\ x\neq-2 \end{cases}$

b) f ist für b = c = 1 nur an der Stelle $x_1 = 1$ nicht stetig.

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}} f(x) = \dfrac{-3}{6} \neq f(1) = 0 \neq \dfrac{3}{6} = \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x)$

An der Stelle $x_2 = -2$ ist f nicht definiert! Diese Stelle ist also für die Stetigkeit unwichtig!

c) Damit f bei $x_1 = 1$ stetig wird, muss gelten $1^2+b\cdot1+c=0 \iff b+c=-1$.

Um f an der Stelle $x_2 = -2$ stetig fortzusetzen muss gelten:

$(-2)^2+b\cdot(-2)+c=0 \iff -2b+c=-4$

Setzt man $c=-b-1$ in $-2b+c=-4$ ein, so folgt $-3b-1=-4 \iff b=1$.

Damit folgt $c=-b-1=-2$.

Nun gilt $x^2+bx+c = x^2+x-2 = (x+2)\cdot(x-1)$ und die stetige Fortsetzung lautet

$\tilde{f}(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)\cdot\operatorname{sgn}(1-x)}{2(x+2)} = \dfrac{(x-1)\cdot\operatorname{sgn}(1-x)}{2} = -\dfrac{1}{2}|x-1|$

4. a) $p(i) = i^3 - 3i \cdot i^2 + 13 \cdot i - 15i = -i + 3i + 13i - 15i = 0$

also ist i eine Nullstelle von p.

b) Polynomdivision:

$$(z^3 - 3i \cdot z^2 + 13 \cdot z - 15i):(z-i) = z^2 - 2i \cdot z + 15$$

$$\begin{array}{l}
\underline{z^3 - i z^2} \\
\quad -2i \cdot z^2 + 13 \cdot z - 15i \\
\quad \underline{-2i \cdot z^2 - 2 \cdot z} \\
\qquad\qquad 15 \cdot z - 15i \\
\qquad\qquad \underline{15 \cdot z - 15i} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

also gilt $p(z) = (z-i) \cdot (z^2 - 2i \cdot z + 15)$

Weitere Nullstellen von p(z):

$z^2 - 2i \cdot z + 15 = 0 \iff (z-i)^2 - (-i)^2 + 15 = 0 \iff (z-i)^2 = -16 \iff$

$(z-i) = \pm 4i \iff z_{1/2} = i \pm 4i \iff z_2 = 5i \;;\; z_3 = -3i$

Damit gilt: $p(z) = (z-i) \cdot (z^2 - 2i \cdot z + 15) = (z-i) \cdot (z-5i) \cdot (z+3i)$