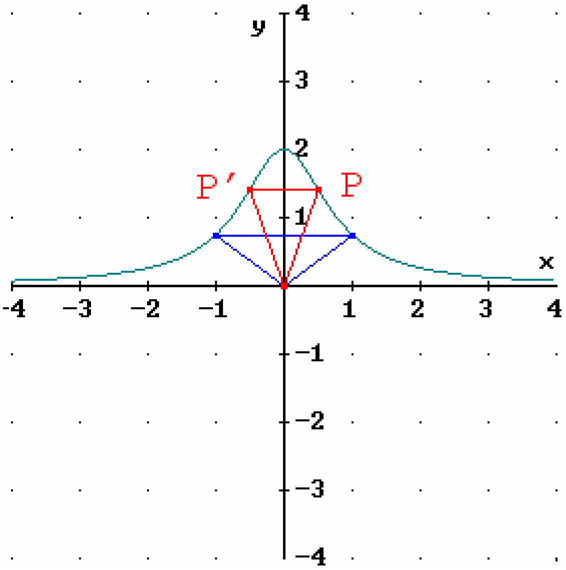
# 4. Schulaufgabe aus der Mathematik, Kl. 11c, 04.07.2005

1. Die Kurvenschar $f_k(x) = \dfrac{4kx}{k + x^2}$ *mit* $k > 0$ soll untersucht werden.
   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter k.
   Untersuchen Sie das Verhalten von $f_k$ an den Rändern des Definitionsbereichs.
   Prüfen Sie die Graphen der Schar auf Symmetrie.
   b) Bestimmen Sie alle Hochpunkte der Schar in Abhängigkeit vom Parameter k.
   Auf welcher Kurve liegen diese Hochpunkte?
   [Teilergebnis: $f_k'(x) = \dfrac{4k\cdot(k-x^2)}{(k + x^2)^2}$ ]
   c) Bestimmen Sie alle Wendepunkte der Schar in Abhängigkeit vom Parameter k.

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion $f(x) = \dfrac{6}{3+5x^2}$ .

   Zwei symmetrische Punkte P und P´ des Graphen bilden zusammen mit dem Ursprung ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt F.

   Für welchen Punkt P ist dieser Flächeninhalt maximal?
   Bestimmen Sie diesen maximalen Flächeninhalt.




3. Ein Flugzeug fliegt mit der durchschnittlichen Geschwindigkeit von 900 Kilometer pro Stunde auf dem kürzesten Weg von Rio (22,9° südl. / 43,2° westl.) nach Madrid (40,4° nördlich / 3,7° westl.).
   a) Wie lange dauert der Flug? Unter welchem Kurswinkel startet das Flugzeug?
   Fertigen Sie zuerst eine übersichtliche Skizze an, in die Sie alle gegebenen und gesuchten Größen geeignet eintragen.
   b) Nach welcher Zeit und bei welcher geographischen Länge überquert das Flugzeug den Äquator?
   Ergänzen Sie Ihre Skizze zur Teilaufgabe 3a.
   (Hinweis: Unter welchem Winkel schneiden die Längenkreise den Äquator?)

   Zur Erinnerung: 1 Seemeile = 1,853 km

| Aufgabe | 1a | b | c | 2 | 3a | b | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 5 | 8 | 6 | 8 | 10 | 8 | 45 |

Gutes Gelingen! G.R.

4. Schulaufgabe aus der Mathematik, Kl. 11c, 04.07.2005

Lösungen:

1. a) $f_k(x) = \frac{4kx}{k + x^2} \quad mit \quad k > 0 \quad ; \quad D_k = R \; ; \; NSt. \; f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x_o = 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_k(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4k}{\frac{k}{x} + x} = \text{"} \frac{4k}{0 \pm \infty} \text{"} = \pm 0$$

$f_k(-x) = -f_k(x) \quad d.h. \; G_k \; ist \; punktsymmetrisch \; zum \; Ursprung.$

b) $f_k'(x) = \frac{(k + x^2)\cdot 4k - 4kx\cdot 2x}{(k + x^2)^2} = \frac{4k^2 - 4kx^2}{(k + x^2)^2}$

$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow 4k^2 = 4kx^2 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{k} \; ; \; y_{2/3} = \frac{4k\cdot(\pm\sqrt{k})}{k + k} = \pm 2\sqrt{k}$

wegen $\lim_{x \to \pm\infty} f_k(x) = \pm 0$ und $f_k(0) = 0 \; und \; f_k(x) > 0 \; für \; x > 0 \; gilt:$

HOP $(+\sqrt{k} \; / \; +2\sqrt{k})$ und TIP $(-\sqrt{k} \; / \; -2\sqrt{k})$

Kurve der Hochpunkte: $x_{HOP} = +\sqrt{k} \quad und \quad y_{HOP} = +2\sqrt{k} \quad \Rightarrow \quad y_{HOP} = 2\,x_{HOP}$

Kurve der HOP: $y = 2x \quad mit \quad x > 0 \quad (wegen \;\; x = \sqrt{k} \in R^+ \quad für \quad k > 0)$

c) $f_k''(x) = \frac{(k + x^2)^2\cdot(-8kx) - (4k^2 - 4kx^2)\cdot 2\cdot(k + x^2)\cdot 2x}{(k + x^2)^4} =$

$f_k''(x) = \frac{(k + x^2)\cdot(-8kx) - (4k^2 - 4kx^2)\cdot 4x}{(k + x^2)^3} = \frac{-24k^2x + 8kx^3}{(k + x^2)^3} = \frac{8kx\cdot(x^2 - 3k)}{(k + x^2)^3}$

$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow 8kx\cdot(x^2 - 3k) = 0 \Leftrightarrow x_o = 0 \; ; \; x_{3/4} = \pm\sqrt{3k} \; mit \; y_{3/4} = \frac{\pm 4k\cdot\sqrt{3k}}{k + 3k} = \pm\sqrt{3k}$

da $x_o$ und $x_{3/4}$ einfache Nullstellen von $f_k''$ sind, gibt es die drei Wendepunkte

$WP_o = (0/0) \quad und \quad WP_{2/3} = (\pm\sqrt{3k} \; / \; \pm\sqrt{3k})$

2. $F = F(x_P) = x_P \cdot f(x_P) = x_P \cdot \frac{6}{3 + 5x_P^2} = \frac{6\cdot x_P}{3 + 5x_P^2} \quad mit \quad x_P \geq 0$

$F'(x_p) = \frac{(3 + 5x_P^2)\cdot 6 - 6\cdot x_P\cdot 10x_p}{(3 + 5x_P^2)^2} = \frac{18 - 30x_P^2}{(3 + 5x_P^2)^2}$

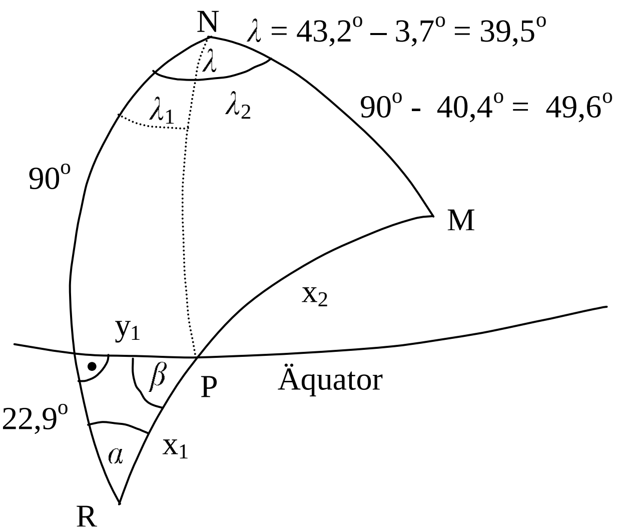
$F'(x_p) = 0 \Leftrightarrow 18 = 30x_P^2 \Leftrightarrow x_P = \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

wegen $\lim_{x \to \infty} F(x_P) = \lim_{x \to \infty} \frac{6\cdot x_P}{3 + 5x_P^2} = 0^+ \quad und \quad F(0) = 0 \quad und \quad F(x_P) \geq 0$ ist

$F(x_P)$ maximal. Also $F_{\max} = F(x_P) = \frac{6\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}}{3 + 5\cdot\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

3. a) Im Kugeldreieck NRM kann zunächst $x = x_1 + x_2$ nach dem Seitenkosinussatz errechnet werden.

Den Kurswinkel $\alpha$ erhält man anschließend nach dem Sinussatz.




$$\cos(x) = \cos(90^0 + 22{,}9^0)\cdot\cos(49{,}6^0) + \sin(90^0 + 22{,}9^0)\cdot\sin(49{,}6^0)\cdot\cos(39{,}5^0)$$

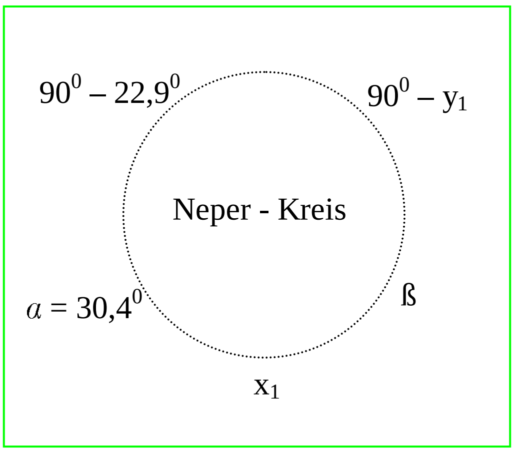
$\Rightarrow \quad x = 73{,}195...^0 \approx 73{,}20^0$ *entspricht* $73{,}2\cdot 60$ *Seemeilen*

$s = 73{,}2\cdot 60\cdot 1{,}853 km = 8138 km$ und die Flugdauer beträgt damit

$$t = \frac{s}{v} = \frac{8138\,km}{900\,\frac{km}{h}} = 9{,}04...h \approx 9h\,3\min$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(39{,}5^0)} = \frac{\sin(49{,}6^0)}{\sin(73{,}20^0)} \quad\Rightarrow\quad \textit{Kurswinkel}\ \ \alpha = 30{,}397...^0 \approx 30{,}40^0$$

b) Nach der Regel von Neper gilt:




$$\cos(\alpha) = \cot(90^0 - 22{,}9^0)\cdot\cot(x_1) = \frac{\tan(22{,}9^0)}{\tan(x_1)}$$

$$\Rightarrow \quad \tan(x_1) = \frac{\tan(22{,}9^0)}{\cos(30{,}4^0)} \quad\Rightarrow$$

$x_1 = 26{,}09...^0$ *entspricht* $2901 km$;

Flugzeit bis zum Äquator:

$$t_Ä = \frac{s_Ä}{v} = \frac{2901\,km}{900\,\frac{km}{h}} = 3{,}22...h \approx 3h\,13\min$$

$$\cos(90^0 - 22{,}9^0) = \cot(90^0 - y_1)\cdot\cot(\alpha) = \frac{\tan(y_1)}{\tan(30{,}4^0)}$$

$\Rightarrow \quad \tan(y_1) = \tan(30{,}4^0)\cdot\sin(22{,}9^0) \quad\Rightarrow\quad y_1 = 12{,}86...^0 \approx 12{,}9^0 \quad (y_1 = \lambda_1)$

Der Ort P am Äquator hat also die geographische Länge $43{,}2^o - 12{,}9^o = 30{,}3^o$ westl.