

Wichtige Sätze zu stetigen Funktionen über abgeschlossenen Intervallen Jahrgangsstufe 11

Satz von der Beschränktheit

Ist f eine im Intervall $[a; b]$ stetige Funktion, so gibt es eine positive Zahl $k \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $x \in [a; b]$ gilt: $|f(x)| < k$.

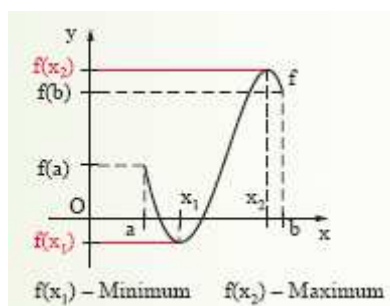
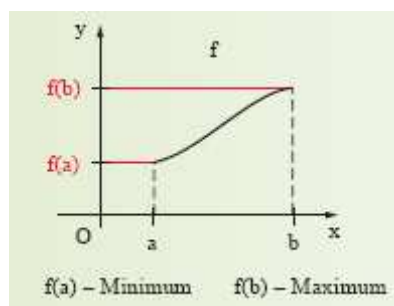
Eine stetige Funktion über einem Intervall kann also nicht beliebig große (oder kleine) Funktionswert annehmen!

Zeige an einem Beispiel, dass dieser Satz nicht für stetige Funktionen über einem offenen Intervall $]a; b[$ gilt.

Extremwertsatz

Ist f eine im Intervall $[a; b]$ stetige Funktion, so gibt es zwei Zahlen $x_1, x_2 \in [a; b]$, so dass für alle $x \in [a; b]$ gilt: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

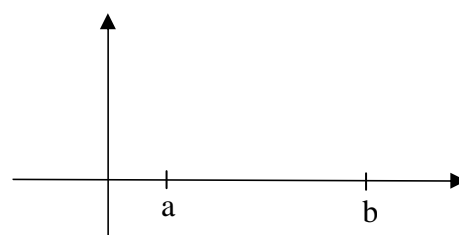
Das so genannte Minimum bzw. Maximum der Funktion kann dabei an den Rändern (Randextremum) oder auch im Innern des abgeschlossenen Intervalls $[a; b]$ angenommen werden (siehe Bilder)



Zwischenwertsatz

Ist f eine im Intervall $[a; b]$ stetige Funktion, so gibt es zu jedem Wert y_0 zwischen den Funktionswerten $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in [a; b]$ mit der Eigenschaft $f(x_1) = y_0$.

Zeichne einen passenden Graphen zum Zwischenwertsatz in das Koordinatensystem.



Nullstellensatz

Ist f eine im Intervall $[a; b]$ stetige Funktion und gilt $f(a) \cdot f(b) < 0$ (d.h. $f(a)$ und $f(b)$ haben unterschiedliches Vorzeichen!), so gibt es ein $x_0 \in [a; b]$ mit $f(x_0) = 0$.

(f hat also dann in $[a; b]$ eine Nullstelle!)

Zeichne auch hierzu einen passenden Graphen.

Zeige an einem Gegenbeispiel, dass dieser Satz für nicht stetige Funktionen über $[a; b]$ nicht gilt.

