

Sphärische Geometrie * Übungsblatt 1

Ellipsen

Die Aufgaben stammen z.T. aus dem bsv-Schulbuch sphärische trigonometrie
von H. Kern und J. Rung

- Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet. Bestimmen Sie die Längen der beiden Halbachsen, ihr Verhältnis und die Entfernung der beiden Brennpunkte, wenn die größte und die kleinste Entfernung von der Sonne gegeben sind. (Die große Halbachse der Erdbahn nennt man Astronomische Einheit = 1AE.
Es gilt: $1 \text{ AE} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$)
 - Merkur: $69,5 \cdot 10^6 \text{ km}$ $45,5 \cdot 10^6 \text{ km}$
 - Erde: $152 \cdot 10^6 \text{ km}$ $147 \cdot 10^6 \text{ km}$
- Der Planet Mars umläuft die Sonne auf einer Ellipsenbahn mit der großen Halbachse 1,524 AE und der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = 0,093$.
 - Welche maximale bzw. minimale Entfernung von der Sonne erreicht der Mars?
 - Auf ihren Umlaufbahnen um die Sonne kommen sich Erde und Mars immer wieder sehr nahe, wobei dieser minimale Abstand sehr unterschiedlich ausfallen kann. In welchem Bereich kann dieser minimale Abstand liegen? (Vgl auch Aufgabe 1)
- Der Komet Encke bewegt sich in ca. 3 Jahren und 112 Tagen auf einer Ellipsenbahn der numerischen Exzentrizität 0,847 um die Sonne.
Berechnen Sie die große und kleine Halbachse der Kometenbahn (Physik! Kepler-Gesetz!)
Prüfen Sie, ob es zu einem Zusammenstoß der Erde mit dem Kometen kommen kann!
- Ein Ellipse heißt von schönster Form, wenn das Halbachsenverhältnis $\sqrt{2} : 1$ beträgt.
 - Berechnen Sie den Abstand der beiden Brennpunkte (in Vielfachen von a bzw. b) bei einer Ellipse von schönster Form.
 - Von welcher besonderer Art ist das Viereck $F_1 S_2 F_2 S_4$ bei einer solchen Ellipse?
 - Welche Bedingung ist an die Halbachsen a und b einer **beliebigen** Ellipse zu stellen, damit es auf ihr mindestens einen Punkt P gibt, für den die **Brennstrahlen** $F_1 P$ und $F_2 P$ senkrecht aufeinander stehen?
- Würde man zwischen Rom und New York eine geradlinige Verbindung durch die Erde hindurchbohren, so ergäbe sich eine Bohrstrecke der Länge 6370 km.
Berechnen Sie die Länge des **Großkreisbogens** zwischen Rom und New York.
 - Der Großkreisbogen zwischen Hamburg und Tunis hat eine Länge von 1860 km.
Wie lang ist die geradlinige Verbindung (durch die Erde) beider Städte?
(Erdradius $r = 6370 \text{ km}$)
- Ein Kugelzweieck auf der Einheitskugel hat die Fläche $F = \frac{3}{4} \pi$.
Berechnen Sie den Zweieckswinkel im Bogen- und im Gradmaß.
- Eine Kugeloberfläche (Kugelradius $r = 5 \text{ cm}$) wird durch zwei Großkreise, die sich unter einem Winkel von 75° schneiden, in vier Teile zerlegt. Berechnen Sie (in cm^2) die Fläche von jedem Teil.
- Neapel (Italien) und New York liegen beide in etwa auf dem gleichen Breitenkreis von 41° nördlich des Äquators. Neapel liegt dabei ca. 14° östlich Greenwich und New York ca. 74° westlich Greenwich. (Erdradius $r = 6370 \text{ km}$)
 - Berechnen Sie die Länge des Breitenkreisbogens von Neapel nach New York.
 - Berechnen Sie die Länge des kürzesten Weges von Neapel nach New York auf der Erdkugel

Lösungen:

1. a) $a = 57,5 \cdot 10^6 \text{ km}$; $b = 56,2 \cdot 10^6 \text{ km}$; $a/b = 1,023$; $2 \cdot e = 24 \cdot 10^6 \text{ km}$
b) $a = 149,5 \cdot 10^6 \text{ km}$; $b = 149,5 \cdot 10^6 \text{ km}$; $a/b = 1,00$; $2 \cdot e = 5,0 \cdot 10^6 \text{ km}$
2. a) $249 \cdot 10^6 \text{ km}$ bzw. $207 \cdot 10^6 \text{ km}$
b) im Bereich von $56 \cdot 10^6 \text{ km}$ bis $103 \cdot 10^6 \text{ km}$
3. Das 3. Keplersches Gesetz $\frac{a^3}{T^2} = \text{konstant}$ liefert zusammen mit den Daten der Erdbahn für den Kometen Encke:
 $a = 2,22 \text{ AE}$, ($e = 1,88 \text{ AE}$), $b = 1,18 \text{ AE}$
Enckes minimaler Abstand zur Sonne beträgt $d = a - e = 0,34 \text{ AE} < 1 \text{ AE}$, d.h. prinzipiell ist ein Zusammenstoß mit der Erde möglich!
Trotzdem besteht keine Gefahr! Warum wohl?
4. a) $2 \cdot e = 2 \cdot b = a \cdot \sqrt{2}$
b) Es handelt sich um ein Quadrat.
c) $b \leq e \Leftrightarrow b^2 \leq a^2 - b^2 \Leftrightarrow a \geq b \cdot \sqrt{2}$
5. a) 6671 km
b) 1853 km
6. $\alpha = \frac{3}{8} \pi$; $\alpha = 67,5^\circ$
7. $65,45 \text{ cm}^2$ bzw. $91,63 \text{ cm}^2$
8. a) 7384 km
b) 7031 km