Aufgaben zur Stetigkeit für die Jahrgangsstufe 11 (Blatt2)

1. Für welche Werte der Parameter a , b und c ist die Funktionen f jeweils stetig?

a) $f(x) = \begin{cases} -3 + a\sqrt{x+1} & ; \quad 3 < x \\ -x^2 - ax + a^2 & ; \quad 0 \le x \le 3 \\ 5a + 2\cdot\sqrt{9 + x^2} & ; \quad x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - b & ; \quad 2 \le x \\ \sqrt{5x^2 + 16} + b & ; \quad 0 \le x < 2 \\ b\cdot(x^2 - 1) & ; \quad -3 \le x < 0 \\ 4 - (2a - 3c)\cdot x & ; \quad x < -3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2a\cdot(x^2 - b) & ; \quad 1 < x \\ x^2 + ax + b & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ 2\cdot\sqrt{a^2 + x^2} - 3a & ; \quad x < 0 \end{cases}$

2. Prüfen Sie, ob die Funktion f an den Definitionslücken stetig fortsetzbar ist.
(Man nennt solche Definitionslücken dann auch stetig behebbar.)

a) $f(x) = \dfrac{(x^2 - 1)\cdot\sin(x)}{(x^2 + x)}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$

c) $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x)\cdot(x^2 - 4)}{2x^2 + 4x}$ d) $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2 + x - 75}{9 - x^2}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x - 1 & ; \quad 2 < x \\ \sqrt{16 - 3x^2} + 11 & ; \quad 0 < x < 2 \\ (x^3 - 5)\cdot(x - 3) & ; \quad x < 0 \end{cases}$

3. Prüfen Sie jeweils, ob die Funktion f stetig ist.
Geben Sie bei Aufgabe a) bis d) zuerst den jeweiligen Definitionsbereich D_f an.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x\cdot\sin(x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$ b) $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{(x^2 - 1)\cdot\mathrm{sgn}(x + 1)}{x^2 + 1}$ d) $f(x) = \dfrac{(1 - x)\cdot\mathrm{sgn}(x^2 - 1)}{x}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & ; \quad 2 \le x \\ \sqrt{x^2 + 1} & ; \quad 0 \le x < 2 \\ (x - 1)\cdot\mathrm{sgn}(x - 1) & ; \quad x < 0 \end{cases}$

G.R.

Lösungen:

1. a) Für $a_1 = -1$ oder $a_2 = 6$ ist f stetig.

   b) Für $a = -1$ und $b = -2$ und $c = 1\frac{5}{9}$ ist f stetig.

   c) Für $a_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ und $b_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ oder
   für $a_2 = \frac{-3-\sqrt{19}}{10}$ und $b_2 = \frac{3+\sqrt{19}}{2}$ ist f stetig.

2. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ 0 , -1 \}$; f lässt sich stetig fortsetzen mit
   $\bar{f}(-1) = 2 \cdot \sin(-1)$ und $\bar{f}(0) = -1$

   b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ -1 , -2 \}$; f lässt sich an keiner der beiden Definitionslücken stetig fortsetzen

   c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ 0 , -2 \}$; f lässt sich stetig fortsetzen mit
   $\bar{f}(0) = -\pi$ und $\bar{f}(-2) = 0$

   d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ -3 , 3 \}$; f lässt sich nur bei $x_1 = 3$ fortsetzen mit
   $\bar{f}(3) = -17\frac{1}{6}$

   e) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ 0 , 2 \}$; f lässt sich stetig fortsetzen mit
   $\bar{f}(0) = 15$ und $\bar{f}(2) = 13$

3. a) $D_f = \mathbb{R}$; f ist stetig

   b) $D_f = [-1 ; 1] \setminus \{ 0 \}$; f ist stetig

   c) $D_f = \mathbb{R}$; f ist stetig (zu prüfen ist die Stelle $x_1 = -1$)

   d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$; kritische Stellen: $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$
   f ist bei $x_2 = 1$ stetig, aber bei $x_1 = -1$ nicht stetig
   f ist damit also nicht stetig

   e) $D_f = \mathbb{R}$; f ist stetig bei $x_1 = 0$ aber nicht stetig bei $x_2 = 2$
   f ist damit also nicht stetig