Mathematik * Klasse 11c * Juni 2006

Kurvendiskussion * Extremwertaufgaben

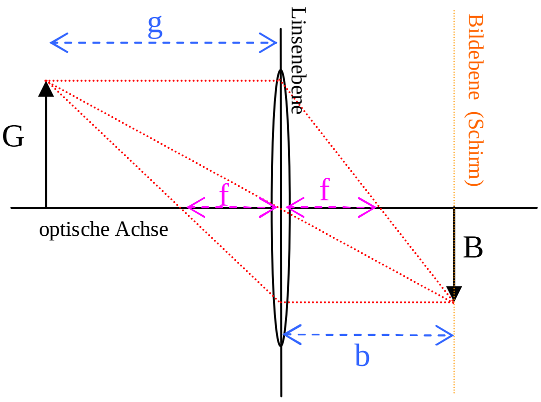
1. Die Kurvenschar $f_k(x) = \dfrac{6x}{k + x^2}$ *mit dem Parameter* $k \geq 1$ soll untersucht werden.

   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte und alle Wendepunkte der Schar in Abhängigkeit von k. Wie verhalten sich die Funktionen für $x \to \pm\infty$?
   b) Schneiden sich Kurven der Schar? Skizzieren Sie den Graphen von f_4 und f_9 .
   c) Auf welcher Kurve liegen alle Hochpunkte der Schar?
   Bestimmen Sie den Funktionsterm g(x), der zu dieser Kurve gehört!
   Skizzieren Sie den Graphen von g.
   d) Gibt es einen Hochpunkt der Schar, der „am höchsten“ bzw. „am tiefsten“ liegt?
   Gibt es einen Hochpunkt, der auf der Geraden y = 0,5x liegt?
   e) Jeder Punkt des Graphen von g bildet zusammen mit dem Punkt A(1/0) ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis auf der x-Achse liegt.
   Bestimmen Sie unter all diesen Dreiecken dasjenige mit maximalem Flächeninhalt!

2. Die Funktion $f(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$ soll untersucht werden.

   a) Diskutieren Sie f und skizzieren Sie den Graphen.
   b) Jeder Punkt des Graphen von f bildet zusammen mit dem Ursprung (0/0) ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis auf der x-Achse liegt.
   Bestimmen Sie unter all diesen Dreiecken dasjenige mit maximalem Flächeninhalt!

3. Linsengleichung
   Bei der Abbildung durch eine Sammellinse der Brennweite f gilt die bekannte Linsengleichung
   $\dfrac{1}{g} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f}$.
   Hierbei ist g die Gegenstandsweite und b die Bildweite (siehe Bild!).
   Das Bild B des Gegenstands G wird dabei auf einem Schirm im Abstand b hinter der Linsenebene scharf abgebildet.



   Es soll nun untersucht werden, bis zu welchem minimalen Abstand g + b zwischen Gegenstand und Schirm noch ein scharfes Bild durch eine Sammellinse der Brennweite f erzeugt werden kann.

   a) Wie groß ist g + b für den Fall g = 2f .
   b) Zeigen Sie, dass man mit der Linse kein scharfes Bild mehr erzeugen kann, falls g + b < 4f gilt!

4. Gefährliche Annäherung?
   Exakt zum Zeitpunkt 16:00 Uhr haben zwei Flugzeuge A und B voneinander den Abstand 5,0 km. A bewegt sich zu diesem Zeitpunkt mit 900 km/h genau auf B zu, während B sich zu diesem Zeitpunkt mit der Geschwindigkeit 200 km/h unter einem Winkel von 60° zur Verbindungslinie AB bewegt. Beide Flugzeuge fliegen mit konstanter Geschwindigkeit und ändern ihre anfängliche Richtung nicht.
   Wie nahe kommen sich die beiden Flugzeuge? Bestimmen Sie auch den zugehörigen Zeitpunkt.
   (Hinweis: Fertigen Sie zuerst eine Skizze in einem geeigneten Koordinatensystem an!)

Lösungen:

1. $f_k(x) = \dfrac{6\,x}{k\,+\,x^2}$ $\quad$ *mit dem Parameter* $k \geq 1$

a) Nullstellen: $\quad \dfrac{6\,x}{k\,+\,x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0$

Symmetrie: $\quad f_k(-x) = -\,f_k(x) \quad d.h. \quad G_{f_k}$ *ist punktsymmetrisch zum Ursprung.*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_k(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6}{\frac{k}{x} + x} = "\frac{6}{0 \pm \infty}" = \pm\,0$$

$$f_k{}'(x) = \frac{(k\,+\,x^2)\cdot 6\;-\,6x\cdot 2x}{(k\,+\,x^2)^2} = \frac{6k\,-\,6x^2}{(k\,+\,x^2)^2} \quad ; \quad f_k{}'(x) = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; 6k = 6x^2 \;\;\Leftrightarrow\;\; x_{2/3} = \pm\sqrt{k}$$

$$HOP\,(\sqrt{k}\;;\frac{3\sqrt{k}}{k}) \;\;[HOP\;wegen\;\; f_k{}''(\sqrt{k}\,) < 0\;\;(s.u.)]\;\;;\;\; TIP\,(-\sqrt{k}\;;-\frac{3\sqrt{k}}{k}) \;\;[Symmetrie]$$

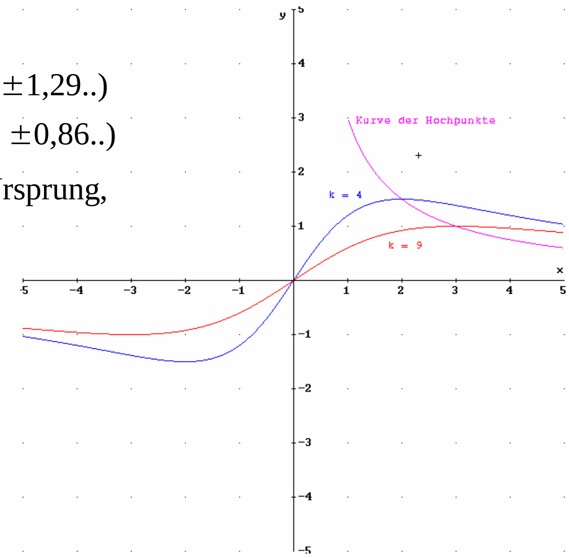
$$f_k{}''(x) = \frac{(k+x^2)^2\cdot(-12x)\,-\,(6k-6x^2)\cdot 2(k+x^2)\cdot 2x}{(k\,+\,x^2)^4} = \frac{(k+x^2)\cdot(-12x)\,-\,(6k-6x^2)\cdot 2\cdot 2x}{(k\,+\,x^2)^3} =$$

$$f_k{}''(x) = \frac{-12kx-12x^3 - 24kx+24x^3}{(k\,+\,x^2)^3} = \frac{-36\,kx\,+12x^3}{(k\,+\,x^2)^3}$$

$$f_k{}''(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 12\,x\cdot(-3k\,+x^2\,) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1 = 0\;;\;\; x_{4/5} = \pm\sqrt{3k}$$

$$WP_o\,(0/0)\,;\;\; WP_1\,(\sqrt{3k}\;/\;\frac{3\cdot\sqrt{3k}}{2k}\,)\;\;;\;\; WP_2\,(-\sqrt{3k}\;/-\frac{3\cdot\sqrt{3k}}{2k}\,)$$

Wendepunkte, weil alle drei Nullstellen von $f_k{}''(x)$ einfache Nullstellen sind.



b) k = 4 : HOP(2/1,5) $\quad WP_o(0/0) \quad WP_{1/2}(\pm 3{,}46../\;\pm 1{,}29..)$

k = 9 : HOP(3/1) $\quad WP_o(0/0) \quad WP_{1/2}(\pm 5{,}19../\;\pm 0{,}86..)$

Die Kurven der Schar schneiden sich alle nur im Ursprung,

denn es gilt: $f_{k1}(x) = f_{k2}(x)$ für $k_1 \neq k_2 \;\;\Leftrightarrow\;\; x = 0$

c) $HOP\,(\sqrt{k}\;;\dfrac{3\sqrt{k}}{k})$ *mit* $k \geq 1 \quad d.h. \quad x_2 = \sqrt{k} \geq 1$

$$x_2 = \sqrt{k} \quad und \quad y_2 = \frac{3\sqrt{k}}{k} \quad\Rightarrow\quad y_2 = \frac{3\cdot x_2}{x_2{}^2} = \frac{3}{x_2}$$

also $\quad g(x) = \dfrac{3}{x} \quad$ *mit* $\quad x \geq 1$

d) Da g eine streng monoton fallende Funktion mit $D_g = [\,1\,;\infty\,[$ ist, liegt der Hochpunkt HOP(1/3) für k=1 am höchsten. Einen Hochpunkt, der am tiefsten liegt, gibt es dagegen nicht. Der Schnittpunkt zu den beiden Funktionen y = g(x) und y = 0,5 x liefert den zusätzlich gesuchten HOP $(\sqrt{6}\,/\,0{,}5\cdot\sqrt{6}\,)$, der zu k = 6 gehört.

e) $$F = \frac{1}{2}\cdot[\,(x_2-1)\cdot 2]\cdot f\,(x_2) = (x_2-1)\cdot\frac{6x_2}{k+x_2{}^2} = \frac{(\sqrt{k}-1)\cdot 6\sqrt{k}}{k+k} = 3 - \frac{3}{\sqrt{k}} = F(k)$$

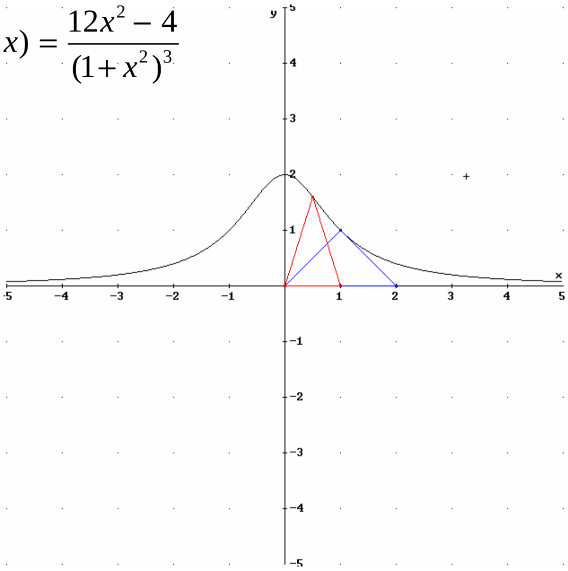
F(k) ist eine streng monoton wachsende Funktion mit $\lim\limits_{k\to\infty} F(k) = 3$.

Es gibt also keine Dreiecksfläche mit maximalem Flächeninhalt.

2. $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$; *keine Nullstellen,* $f(-x) = f(x)$ G_f *ist achsensymmetr. zur* $y-$*Achse*

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^+$; $f'(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$; $f''(x) = \dfrac{12x^2-4}{(1+x^2)^3}$

HOP (0 / 2) ; $WP(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} / 1{,}5)$



Ist (x/f(x)) der Punkt an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks, so gilt:

$F = F(x) = \dfrac{1}{2}\cdot(2x)\cdot f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

F soll maximal werden!

$F'(x) = \dfrac{(1+x^2)\cdot 2 - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$

$F'(x) = 0 \iff 2 = 2x^2 \iff x_{1/2} = \pm 1$

Wegen $F(0) = 0 = \lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ ist der Flächeninhalt des roten Dreiecks mit der Spitze bei (1/0) maximal und hat den Wert F(1) = 1.

3. a) Für g = 2f liefert die Linsengleichung b = 2f und damit g + b = 4f.

b) y = g + b soll für ein vorgegebenes f minimal werden.

$\dfrac{1}{g} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f} \Rightarrow \dfrac{1}{b} = \dfrac{g-f}{f\cdot g} \Rightarrow b = \dfrac{f\cdot g}{g-f} \Rightarrow y = g + b = g + \dfrac{f\cdot g}{g-f} = \dfrac{g^2}{g-f}$

$y = y(g) = \dfrac{g^2}{g-f}$ soll maximal werden! $y'(g) = \dfrac{(g-f)\cdot 2g - g^2\cdot 1}{(g-f)^2} = \dfrac{g^2-2fg}{(g-f)^2}$

$y'(g) = 0 \iff g^2 = 2fg \iff g = 2f$ $(g{=}0$ *ist keine brauchbare Lösung!*$)$

Bei g = 2f liegt Minimum vor, weil y´ an der Stelle g = 2f das Vorzeichen n - auf + ändert. Nach 3a) gilt damit für den minimalen Abstand y_{min} = 4f .

5. t = 0 zum Zeitpunkt 16:00 Uhr.

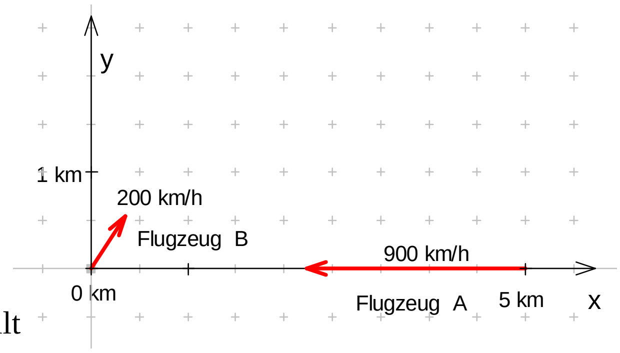
Koordinaten von Flugzeug A:

$A(5km - v_A\cdot t \;/\; 0)$

Koordinaten von Flugzeug B:

$B(v_B\cdot\cos(60^o)\cdot t \;/\; v_B\cdot\sin(60^o)\cdot t)$

$B(v_B\cdot\dfrac{1}{2}\cdot t \;/\; v_B\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot t)$



Für den Abstand d der beiden Flugzeuge gilt nach Pythagoras:

$$d^2 = (5km - 900\frac{km}{h}\cdot t - 100\frac{km}{h}\cdot t)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 200\frac{km}{h}\cdot t)^2$$

$d^2(t) = 25km^2 - 10000\dfrac{km^2}{h}\cdot t + 1030000\dfrac{km^2}{h^2}\cdot t^2$ Da d genau dann minimal ist, wenn d^2 minimal ist, bildet man die Ableitung von $d^2(t)$ nach der Zeit!

$(d^2)'(t) = -10000\dfrac{km^2}{h} + 2060000\dfrac{km^2}{h^2}\cdot t \overset{!}{=} 0 \iff t = \dfrac{1}{206}h \approx 17{,}5\,s$

Der minimale Abstand der beiden Flugzeuge um 16:00:17,5 Uhr beträgt d_{min} =

$d(\dfrac{1}{206}h) = \sqrt{0{,}728...km^2} \approx 0{,}853\,km$.