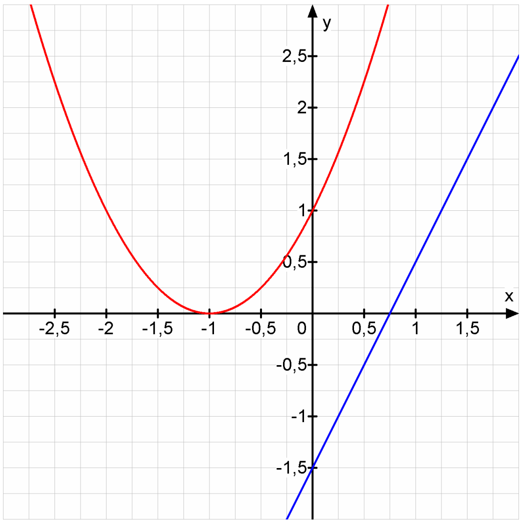
Wahlintensivierung Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * G9

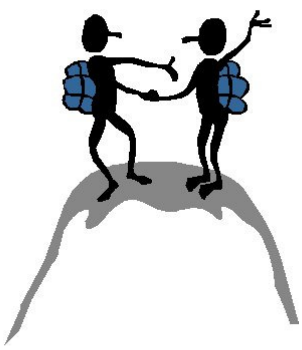
Vermischte Übungsaufgaben zur Ableitungsfunktion



1. Das Bild zeigt den Graphen einer verschobenen Normalparabel und der Geraden g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 2x - 1{,}5$.
   a) Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x) der verschobenen Normalparabel.
   b) Bestimmen Sie den Punkt P auf der verschobenen Normalparabel, der von der Geraden den kleinsten Abstand hat. (Hinweis: Welche Steigung muss die Tangente an G_f im Punkt P haben?)
   c) Ermitteln Sie diesen minimalen Abstand!

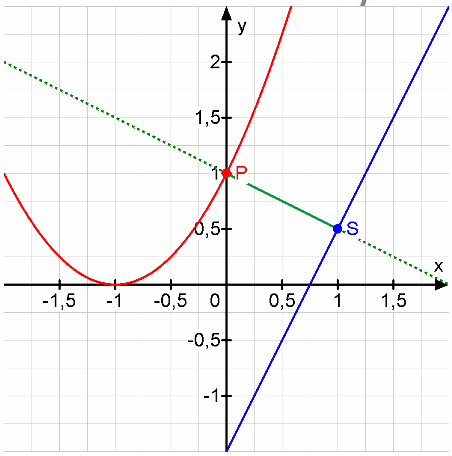
2. Es soll die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - 3$ untersucht werden.
   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f und prüfen Sie den Graphen auf Symmetrie. Wie verhält sich die Funktion für $x \to \pm\infty$?
   b) Berechnen Sie $f'(x)$ und bestimmen Sie alle Stellen mit horizontaler Tangente. Besitzt der Graph von f so genannte Hoch- bzw. Tiefpunkte?
   c) Unter welchem Winkel schneidet der Graph von f die positive x-Achse? Skizzieren Sie den Graphen.

3. Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ und $g(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x + 1$.
   a) Wie verhalten sich die beiden Funktionen für $x \to \pm\infty$?
   b) Bestimmen Sie die beiden Ableitungsfunktionen f' und g'. Bestimmen Sie für beide Graphen alle Stellen mit horizontalen Tangenten. Bestimmen Sie alle Hoch- bzw. Tiefpunkte der beiden Graphen.
   c) Bestimmen Sie die Koordinaten der drei Schnittpunkte der beiden Graphen. Skizzieren Sie die Graphen.
   d) Bestimmen Sie die Schnittwinkel der beiden Graphen.



Wahlintensivierung Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * G9
Vermischte Übungsaufgaben zur Ableitungsfunktion * Lösungen

1. a) $f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$



b) Die Tangente im Punkt P muss die gleiche Steigung wie die Gerade g haben.

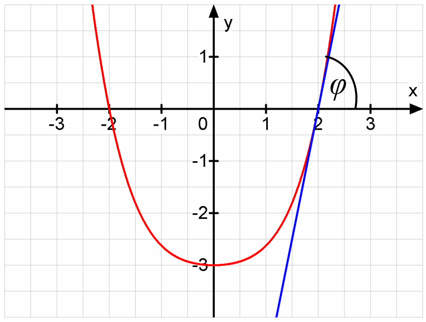
$f'(x) = 2x + 2$ und $f'(x_P) = 2 \Leftrightarrow$

$2x_P + 2 = 2 \Leftrightarrow x_P = 0$ also $P(0/1)$

c) Die Normale n im Punkt P hat die Steigung - 0,5 , also gilt $n(x) = -0{,}5\,x + 1$
Der Schnittpunkt von n und g ist S(1/0,5).

$$d_{min} = \overline{PS} = \sqrt{(1-0)^2 + (0{,}5-1)^2} = \sqrt{1{,}25} = 0{,}5\sqrt{5} \approx 1{,}12$$

2. a) Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 - 24 = 0$
Mit der Substitution $u = x^2$ folgt



$u^2 + 2u - 24 = 0 \Leftrightarrow u_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(-2 \pm \sqrt{4+4\cdot 24})$

$u_1 = 4$; ($u_2 = -6$ wegen $x^2 = u$ keine Lösung!)

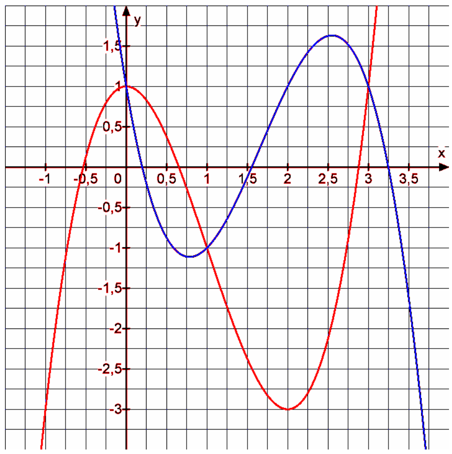
$x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$; Symmetrie: f(-x) = - f(x)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{8}x^4\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right) = \text{"}\infty\cdot(1+0-0)\text{"} = \infty$$

b) $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x$ und $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot x\cdot(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$ und $y_3 = -3$
Wegen Grenzwertverhalten also Tiefpunkt TIP(0/-3).

c) $f'(2) = \frac{1}{2}\cdot 2^3 + \frac{1}{2}\cdot 2 = 5$ also $\tan\varphi = 5 \Rightarrow \varphi \approx 78{,}7^\circ$

3. a) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right) = \text{"}\pm\infty\cdot(1\mp 0\pm 0)\text{"} = \pm\infty$



$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3\left(-1+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = \mp\infty$

b) $f'(x) = 3x^2 - 6x$ und $g'(x) = -3x^2 + 10x - 6$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 ; x_2 = 2$

HOP(0/1) und TIP(2/-3)

$g'(x) = -3x^2 + 10x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_{3/4} = \frac{1}{3}(5 \pm \sqrt{7})$

$x_3 \approx 2{,}55$; $x_4 \approx 0{,}78$;

HOP ≈ (2,55/1,63) und TIP ≈ (0,78/-1,11)

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 1 = -x^3 + 5x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow 2x^3 - 8x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow$

$x(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 ; x_5 = 1 ; x_6 = 3$ also $S_1(0/1)$; $S_2(1/-1)$; $S_3(3/1)$

d) $S_1(0/1)$: $f'(0) = 0$ und $g'(0) = -6 \Rightarrow \tan\varphi_1 = \left|\frac{0-(-6)}{1+0\cdot(-6)}\right| = 6 \Rightarrow \varphi_1 \approx 80{,}5^\circ$

$S_2(1/-1)$: $f'(1) = -3$ und $g'(1) = 1 \Rightarrow \tan\varphi_2 = \left|\frac{1-(-3)}{1+1\cdot(-3)}\right| = 2 \Rightarrow \varphi_2 \approx 63{,}4^\circ$

$S_3(3/1)$: $f'(3) = 9$ und $g'(3) = -3 \Rightarrow \tan\varphi_2 = \left|\frac{9-(-3)}{1+9\cdot(-3)}\right| = \frac{6}{13} \Rightarrow \varphi_2 \approx 24{,}8^\circ$