Wahlintensivierung Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * G9

Kurvendiskussion mit Parameter

1. Lehrer Gmeinwieser will für einen Test eine Funktion dritten Grades finden, die einen Hoch- und einen Tiefpunkt hat.
   Er beginnt mit einem Funktionsterm, der noch einen freien Parameter (d.h. Formvariable, die beliebig aber fest ist) enthält, um während der Berechnungen den Funktionsterm noch geeignet abändern zu können.

   $f_k(x) = x^3 + k\,x^2 + 3x \quad (k \in R)$

a) Hängt das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs von k ab?

b) Für welche Werte von k hat die Funktion eine, zwei bzw. drei Nullstellen?

c) Für welche Werte von k hat der Graph der Funktion einen Hochpunkt?

d) Gibt es ein geeignetes k , so dass der Graph einen Hochpunkt bzw. einen Tiefpunkt an der Stelle $x_E = 3$ hat?

e) Gibt es ein geeignetes k, so dass die Funktion nur eine Nullstelle aber einen Hoch- und einen Tiefpunkt hat?

f) Kann man ein k finden, so dass die Funktion zwar drei Nullstellen aber keinen Hochpunkt hat?

2. Lehrer Gmeinwieser ist nach seinen Rechnungen nicht ganz zufrieden mit seinem Funktionsterm.
   Er probiert es daher noch einmal mit einem ähnlichen Ansatz:

   $g_k(x) = x^3 + 3x^2 + k\,x \quad (k \in R)$

   Wie muss er nun die sechs bei Aufgabe 1 gestellten Fragen beantworten?

Prüfen Sie Ihre Ergebnisse mit geeigneter Software!

Wahlintensivierung Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * G9

Kurvendiskussion mit Parameter * Lösung

1. a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x) = \pm\infty$; hängt nicht von k ab!

b) $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x^2+kx+3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_{2/3} = \frac{1}{2}\cdot(-k \pm \sqrt{k^2-12})$

also genau eine Nullstelle $x_1 = 0$, falls $|k| < 2\sqrt{3}$

zwei Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_{2/3} = -\frac{1}{2}k$, falls $|k| = 2\sqrt{3}$

genau drei Nullstellen x_1 , x_2 und x_3 (s.o.) , falls $|k| > 2\sqrt{3}$

c) $f_k'(x) = 3x^2 + 2kx + 3$ horizontale Tangenten für $f_k'(x) = 0$

$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2kx + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{4/5} = \frac{1}{3}(-k \pm \sqrt{k^2-9})$

HOP und TIP gibt es nur für $|k| > 3$ (für $|k| < 3$ gibt es keine horizontalen Tangenten und für $|k| = 3$ liegt bei $x_4 = x_5 = -\frac{1}{3}k$ ein Terrassenpunkt.)

d) $x_{4/5} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(-k \pm \sqrt{k^2-9}) = 3 \Leftrightarrow \pm\sqrt{k^2-9} = k+9 \Leftrightarrow k = -5$

Für $k = -5$ liegt bei $x_4 = \frac{1}{3}(-k + \sqrt{k^2-9}) = 3$ ein TIP (und kein HOP, wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x) = \pm\infty$ und $x_4 > x_5$).

e) Das ist möglich, wenn $|k| < 2\sqrt{3}$ und gleichzeitig $|k| > 3$ gilt (siehe b und c), z.B. für $k = 3{,}1$ oder $k = -3{,}1$.

f) Es müsste dazu $|k| > 2\sqrt{3}$ und gleichzeitig $|k| < 3$ gelten; dies ist aber nicht möglich!

2. a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g_k(x) = \pm\infty$; hängt nicht von k ab!

b) Für $k > 2{,}25$ nur eine Nullstelle $x_1 = 0$; für $k = 2{,}25$ zwei NSt. $x_1 = 0$ und $x_{1/2} = -1{,}5$; für $k < 2{,}25$ drei NSt. $x_1 = 0$ und $x_{2/3} = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{9-4k})$

c) $g_k'(x) = 3x^2 + 6x + k$; $g_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{4/5} = -1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{9-3k}$

Nur für $k < 3$ gibt es einen Hochpunkt bei $x_5 = -1 - \frac{1}{3}\sqrt{9-3k}$

d) Für $k = -45$ gibt es bei $x_4 = -1 + \frac{1}{3}\sqrt{9-3k} = 3$ einen Tiefpunkt.

e) Für alle k mit $2{,}25 < k < 3$ gibt es nur eine Nullstelle und einen Hochpunkt und Tiefpunkt.

f) Für alle $k < 2{,}25$ gibt es drei Nullstellen und zusätzlich auch einen Hochpunkt!