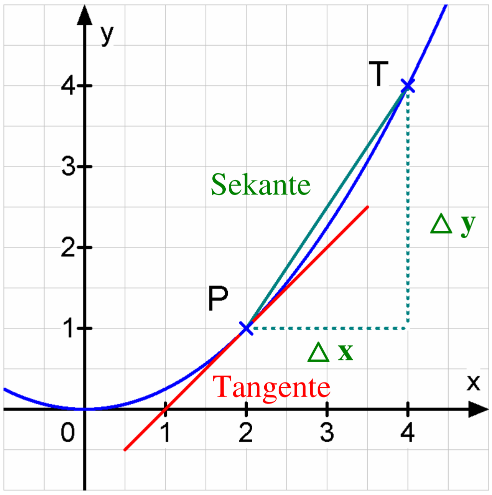
Wahlintensivierung Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * G9

Die Steigung der Tangente an einem Funktionsgraphen * h-Methode



Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}25 \cdot x^2$.

Im Punkt P(2/1) soll die Steigung m der Tangente an den Graphen von f bestimmt werden werden.

Dazu bestimmt man die Steigung der Sekante PT, wobei T ein Punkt des Graphen von f ist, und lässt dann diesen Punkt T immer näher an P „heranrücken“.

Für die Steigung m_P der Tangente im Punkt P(x_P / f(x_P)) gilt dann

$$m_P = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_T \to x_P} \frac{f(x_T) - f(x_P)}{x_T - x_P} = \lim_{x \to x_P} \frac{f(x) - f(x_P)}{x - x_P}$$ (so genannter Differenzialquotient)

Mit der so genannten h-Methode schreibt man diesen Differenzialquotient so:

$$m_P = \lim_{x \to x_P} \frac{f(x) - f(x_P)}{x - x_P} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_P + h) - f(x_P)}{x_P + h - x_P} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_P + h) - f(x_P)}{h}$$

Im gegebenen Beispiel also

$$m_P = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{0{,}25x^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{0{,}25(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 0{,}25(x+2) = 1$$ oder

$$m_P = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0{,}25(2+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h + 0{,}25h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (1 + 0{,}25h) = 1$$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Tangentensteigung im Punkt P(1 / ?) und im Punkt Q(-2/?) des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3$.

2. Zeigen Sie allgemein: Die Tangentensteigung m_P im Punkt P(x_P / ?) des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^3$ berechnet sich zu $m_P = 0{,}5 \cdot x_P^2$

   Man kann die Steigung m_P selbst wieder als eine Funktion der Variablen x_P auffassen und nennt diese Funktion die **Ableitungsfunktion f ´** (oder kurz Ableitung f ´) von f .
   f ´(x) gibt also an jeder Stelle die Steigung des Graphen von f an der Stelle x an.

3. a) Bestimmen Sie für $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 3$ die zugehörige Ableitungsfunktion f ´(x) .

   b) Der Graph von f ist eine nach oben geöffnete Parabel. Bestimmen Sie mit Hilfe der Ableitung f ´ den Scheitel dieser Parabel. (Hinweis: Tangentensteigung im Scheitel!)

   c) Bestimmen Sie für $g(x) = x^3 - 3x^2$ die zugehörige Ableitungsfunktion g´(x) .
   Hat der Graph von g Stellen mit waagrechter Tangente?
   Welche Bedeutung haben diese Stellen für den Graphen?

Wahlintensivierung Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * G9
Die Steigung der Tangente an einem Funktionsgraphen * h-Methode

1 $P(1/\frac{1}{6})$; $m_P = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{6}(1+h)^3 - \frac{1}{6}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h + 3h^2 + h^3}{6 \cdot h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (\frac{1}{2} + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6}) = \frac{1}{2}$

$Q(-2/-\frac{4}{3})$; $m_Q = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{6}(-2+h)^3 + \frac{4}{3}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{12h - 6h^2 + h^3}{6 \cdot h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (2 - h + \frac{h^3}{6}) = 2$

2. $P(x_P/f(x_P))$ und $m_P = f'(x_P) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_P + h) - f(x_P)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{1}{6}(x_P + h)^3 - \frac{1}{6}x_P^3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3x_P^2 \cdot h + 3x_P \cdot h^2 + h^3}{6h} = \lim\limits_{h \to 0} (\frac{1}{2}x_P^2 + \frac{1}{2}x_P \cdot h + \frac{1}{6}h^2) = \frac{1}{2} \cdot x_P^2$

3. a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0{,}5(x+h)^2 - 3(x+h) + 3 - (0{,}5x^2 - 3x + 3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0{,}5x^2 + xh + 0{,}5h^2 - 3x - 3h + 3 - 0{,}5x^2 + 3x - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{xh + 0{,}5h^2 - 3h}{h} =$

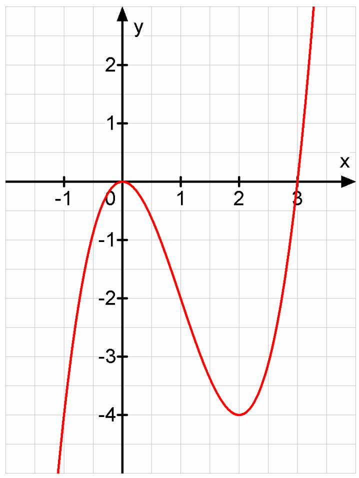
$= \lim\limits_{h \to 0} (x + 0{,}5h - 3) = x - 3$

b) Am Scheitel $S(x_S/y_S)$ hat die Parabel eine waagrechte Tangente, d.h. es muss $f'(x_S) = 0$ gelten. $f'(x_S) = 0 \Leftrightarrow x_S - 3 = 0 \Leftrightarrow x_S = 3$; also $S(3/f(3)) = S(3/-1{,}5)$

c) $g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^3 - 3(x+h)^2 - (x^3 - 3x^2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 3x^2 - 6xh - h^2 - x^3 + 3x^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 6xh - h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 6x - h) = 3x^2 - 6x$



An den Stellen mit waagrechter Tangente muss gelten:

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

In den Punkten (0/0) und (2/-4) hat der Graph von g waagrechte Tangenten, dort Hat der Graph einen „höchsten“ bzw. „tiefsten“ Punkt.