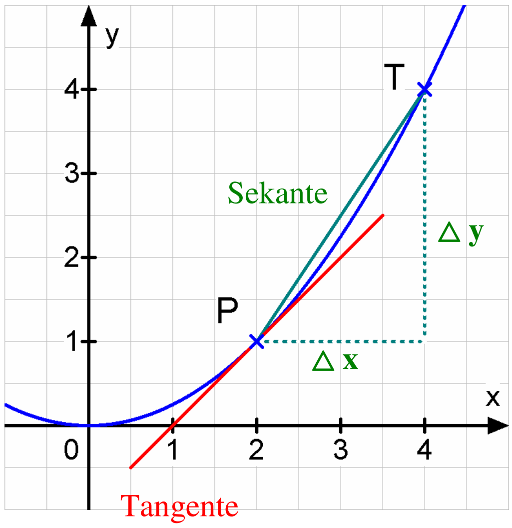
Wahlintensivierung Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * G9

Die Steigung der Tangente an einem Funktionsgraphen

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,25 \cdot x^2$.

Im Punkt $P(2/1)$ soll die Steigung m der Tangente an den Graphen von f bestimmt werden.

Dazu bestimmt man die Steigung der Sekante PT, wobei T ein Punkt des Graphen von f ist, und lässt dann diesen Punkt T immer näher an P „heranrücken".



Für die Steigung m_P der Tangente im Punkt $P(x_P / f(x_P))$ gilt dann

$$m_P = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_T \to x_P} \frac{f(x_T) - f(x_P)}{x_T - x_P} = \lim_{x \to x_P} \frac{f(x) - f(x_P)}{x - x_P}$$

Im gegebenen Beispiel also

$$m_P = \lim_{x \to x_P} \frac{f(x) - f(x_P)}{x - x_P} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{0,25x^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{0,25(x^2 - 4)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{0,25 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 0,25 \cdot (x + 2) = 0,25 \cdot (2 + 2) = 1$$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Tangentensteigung im Punkt $P(1 / ?)$ und im Punkt $Q(-2/?)$ des Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0,25 \cdot x^2$.

2. Zeigen Sie allgemein: Die Tangentensteigung m_P im Punkt $P(x_P / ?)$ des Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0,25 \cdot x^2$ berechnet sich zu $m_P = 0,5 \cdot x_P$

3. Die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ soll untersucht werden.

   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f und das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs!

   b) Bestimmen Sie die Tangentensteigung in den Punkten $A(0/?)$, $B(1/?)$, $C(2/?)$ und $D(3/?)$ des Graphen von f.

   c) Ermitteln Sie allgemein im Punkt $P(x_o / f(x_o))$ des Graphen von f die Tangentensteigung. An welchen Stellen besitzt der Graph waagrechte Tangenten?

   d) Welche Aussagen kann man mit Hilfe des Ergebnisses von c) über die Monotonie der Funktion f machen?

Wahlintensivierung Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * G9
Die Steigung der Tangente an einem Funktionsgraphen

1. P(1/0,25) und $m_P = \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{0,25x^2-0,25}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{0,25(x^2-1)}{x-1} =$

$$\lim_{x\to 1}\frac{0,25(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} 0,25\cdot(x+1) = 0,25\cdot 2 = 0,5$$

Q(-2/1) und $m_Q = \lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim\limits_{x\to -2}\frac{0,25x^2-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}\frac{0,25(x^2-4)}{x+2} =$

$$\lim_{x\to -2}\frac{0,25(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2} 0,25\cdot(x-2) = 0,25\cdot(-4) = -1$$

2. $P(x_P/f(x_P))$ und $m_P = \lim\limits_{x\to x_P}\frac{f(x)-f(x_P)}{x-x_P} = \lim\limits_{x\to x_P}\frac{0,25x^2-0,25x_P{}^2}{x-x_P} = \lim\limits_{x\to x_P}\frac{0,25(x^2-x_P{}^2)}{x-x_P} =$

$$= \lim_{x\to x_P}\frac{0,25(x-x_P)(x+x_P)}{x-x_P} = \lim_{x\to x_P} 0,25\cdot(x+x_P) = 0,25\cdot(x_P+x_P) = 0,5\cdot x_P$$

3. a) NSt.: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+9x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x-3)^2=0 \Leftrightarrow x_1=0\,;\; x_2=3$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3\cdot\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right) = \pm\infty\cdot(1\mp 0+0) = \pm\infty$$

b) A(0/0) und $m_A = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-6x^2+9x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^2-6x^1+9 = 0+9 = 9$

B(1/4) und $m_B = \lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-4}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+9x-4}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x^2-5x+4)}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to 1}(x^2-5x+4) = 1-5+4 = 0$$

C(2/2) und $m_C = \lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-6x^2+9x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x^2-4x+1)}{x-2} =$

$$= \lim_{x\to 2}(x^2-4x+1) = 4-8+1 = -3$$

D(3/0) und $m_D = \lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-0}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-6x^2+9x}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)\cdot(x^2-3x)}{x-3} =$

$$= \lim_{x\to 3}(x^2-3x) = 9-9 = 0$$

Der Graph von f hat in den Punkten B und D waagrechte Tangenten!

c) $P(x_P/y_P)$ und $m_P = \lim\limits_{x\to x_P}\frac{f(x)-f(x_P)}{x-x_P} = \lim\limits_{x\to x_P}\frac{x^3-6x^2+9x-(x_P{}^3-6x_P{}^2+9x_P)}{x-x_P} =$

$$= \lim_{x\to x_P}\frac{(x^3-x_P{}^3)-6\cdot(x^2-x_P{}^2)+9(x-x_P)}{x-x_P} =$$

$$= \lim_{x\to x_P}\frac{(x-x_P)\cdot\left[(x^2+xx_P+x_P{}^2)-6(x+x_P)+9\right]}{x-x_P} =$$

$$= \lim_{x\to x_P}(x^2+xx_P+x_P{}^2)-6(x+x_P)+9 = 3x_P{}^2-12x_P+9$$

waagrechte Tangenten für $m_P=0 \Leftrightarrow 3x_P{}^2-12x_P+9=0 \Leftrightarrow x_P{}^2-4x_P+3=0 \Leftrightarrow$
$(x_P-1)\cdot(x_P-3)=0 \Leftrightarrow x_{P1}=1\;;\; x_{P2}=3$ also in den Punkten B(1/4) und D(3/0).

d) In den Intervallen $]-\infty;1]$ und $[3;\infty[$ ist f streng monoton steigend, im Intervall $[1;3]$ ist die Funktion f streng monoton fallend.