Wahlintensivierung Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * G 9

Weihnachtsaufgaben

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

   a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

   c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ mit $n \in \mathbb{N}$

2. Für welches $n \in \mathbb{N}$ gilt

   a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^2 - 1} = 2008$

   b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^4 - 1} = 2009$

3. Die Zahl $z = 8^{88} - 1 \in \mathbb{N}$ soll untersucht werden.

   a) Wie viele Stellen hat diese Zahl?
   Wie lauten die ersten 11 Ziffern dieser Zahl?

   b) Zeigen Sie, dass die Zahl z ein Vielfaches von 7 ist.
   Man sagt 7 teilt z und schreibt dafür $7 \mid z$.

   c) Zeigen Sie, dass die Zahl z noch die folgenden Zahlen als Teiler hat:
   $9 \mid z$ und $5 \mid z$ und $13 \mid z$ und
   $17 \mid z$ und $241 \mid z$

   d) Wie lautet die letzte Ziffer der Zahl z ?

4. Geben Sie für die folgenden Zahlen ebenfalls möglichst große Primzahlteiler an.

   a) $z = 6^{78} - 1$

   b) $z = 6^{66} - 1$

   c) $z = 5^{120} - 1$

   d) $z = 33^{44} - 1$

Wahlintensivierung Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * G 9
Lösungen zu den Weihnachtsaufgaben

1. a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = 2$

   b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{x - 1} = 3$

   c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)\cdot(x^{n-1}+x^{n-2}+ ... +x+1)}{(x - 1)} = n$

2. a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^2 - 1} = 2008 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1}{x + 1} = 2008 \Leftrightarrow \dfrac{n}{2} = 2008 \Leftrightarrow$
   $n = 4016$

   b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^4 - 1} = 2009 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{n-1}+x^{n-2}+x+1}{(x^2+1)\cdot(x+1)} = 2009 \Leftrightarrow \dfrac{n}{4} = 2009 \Leftrightarrow$
   $n = 8036$

3. a) Der Taschenrechner zeigt $z = 8^{88} - 1 = 2{,}96427748... \cdot 10^{79}$
   Die Zahl z hat also 80 Stellen.
   Subtrahiert man von z am Taschenrechner die Zahl $2{,}964277 \cdot 10^{79}$, so zeigt er weitere Stellen von z an. Je nach Taschenrechnertyp erhält man mehr oder weniger weitere Stellen $z = 8^{88} - 1 = 2{,}9642774844755... \cdot 10^{79}$.

   b) $z^n - 1 = (z-1)\cdot(z^{n-1}+z^{n-2}+ ... +z+1) \Rightarrow 8^{88} - 1 = (8-1)\cdot(8^{87} + 8^{86} +...+1) \Rightarrow$
   $8^{88} - 1 = 7 \cdot z_1$ und damit teilt 7 die Zahl z.

   c) $z = 8^{88} - 1 = ((8^2)^{44} - 1) = (8^2 - 1)\cdot((8^2)^{43} + (8^2)^{42} +...+1) \Rightarrow z = 63 \cdot z_2$
   Wegen $63 = 9 \cdot 7$ ist damit auch 9 ein Teiler von z.
   $z = 8^{88} - 1 = ((8^4)^{22} - 1) = (8^4 - 1)\cdot((8^4)^{21} + (8^4)^{20} +...+1) \Rightarrow z = 4095 \cdot z_3$
   Wegen $4095 = 5 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 13$ sind damit auch 5 bzw. 13 Teiler von z.
   $z = 8^{88} - 1 = ((8^8)^{11} - 1) = (8^8 - 1)\cdot((8^8)^{11} + (8^8)^{10} +...+1) \Rightarrow z = 16777215 \cdot z_4$
   Wegen $16777215 = 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241$ sind damit auch 17 bzw. 241 Teiler von z.

   d) z ist ungerade und durch 5 teilbar. Daher lautet die letzte Ziffer 5.

4. a) $z = 6^{78} - 1 = (6^6)^{13} - 1 = (6^6 - 1)\cdot z_1 = 46655 \cdot z_1 = 5 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 43 \cdot z_1$
   z wird also von der Primzahl 43 geteilt.

   b) $z = 6^{66} - 1 = (6^{11})^6 - 1 = (6^{11} - 1)\cdot z_2 = 362797055 \cdot z_2 = 5 \cdot 23 \cdot 3154757 \cdot z_2$
   z wird also von der Primzahl 23 bzw. 3154757 geteilt.

   c) $z = 5^{120} - 1 = (5^{10})^{12} - 1 = (5^{10} - 1)\cdot z_3 = 9765624 \cdot z_3 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 71 \cdot 521 \cdot z_3$
   z wird also von der Primzahl 521 geteilt.

   d) $z = 33^{44} - 1 = (33^4)^{11} - 1 = (33^4 - 1)\cdot z_4 = 1185920 \cdot z_4 = 2^7 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 109 \cdot z_4$
   z wird also von der Primzahl 109 geteilt.