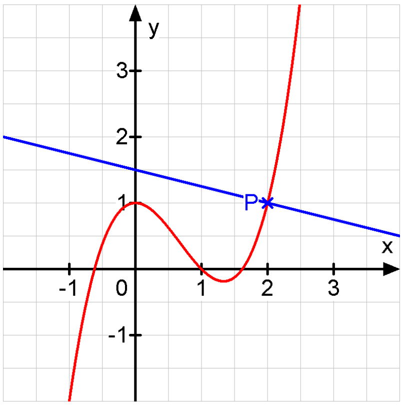
3. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 11a * 22.04.2009

1) Das Bild zeigt den Graphen der Funktion

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.



a) Unter welchem Winkel schneidet der Graph G_f die x-Achse im Punkt (1/0) ?

b) Die blau eingezeichnete Normale im Punkt P(2 / 1) schneidet den Graphen G_f senkrecht. Bestimmen Sie die Geradengleichung dieser Normalen mit geeigneter Rechnung.

2) Lösen Sie diese Aufgabe auf dem beigefügten Lösungsblatt!

3) Bestimmen Sie jeweils die Ableitungsfunktion $f'(x)$ und vereinfachen Sie so weit wie möglich! Prüfen Sie dann, ob der Graph von f an der Stelle $x_1 = 0$ einen Hoch-, Tief- oder Terrassenpunkt besitzt.

a) $f(x) = 2 \cdot (x^3 - 3x^2)^2$

b) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

4) Für den Flächeninhalt eines Kugeldreiecks wurde im Unterricht die Formel

$F_{\text{Kugeldreieck}} = r^2 \cdot \pi \cdot \dfrac{\varepsilon}{180^\circ}$ hergeleitet, wobei ε der so genannte Exzess des Dreiecks ist.

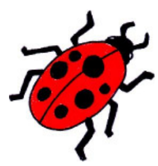
Bestimmen Sie die Winkel eines gleichseitigen Kugeldreiecks, dessen Flächeninhalt 10% der Kugeloberfläche beträgt. (Hinweis: $F_{\text{Kugeloberfläche}} = 4r^2\pi$)

5) Roberto will mit seinem Segelschiff von San Diego (32,7° nördl./ 117,2° westl.) nach Honolulu (21,3° nördl./ 157,8° westl.) auf den Hawaii-Inseln segeln.
Da er mit dem Navigieren Schwierigkeiten hat, wählt er eine einfache Route:
Zunächst segelt er nur in Richtung Westen bis zum Punkt A (32,7° nördl. / 157,8° westl.) im Pazifik, dann geht es nur noch in Richtung Süden bis nach Honolulu.
(Hinweis: Erdradius r = 6370 km)

a) Wie lang ist der von Roberto insgesamt zurückzulegende Weg?

b) Wie lang ist der kürzeste Weg von San Diego zum Punkt A im Pazifik?

Aufgabe	1a	b	2a	b	3a	b	4	5a	b	Summe
Punkte	3	3	4	2	4	4	3	5	5	33

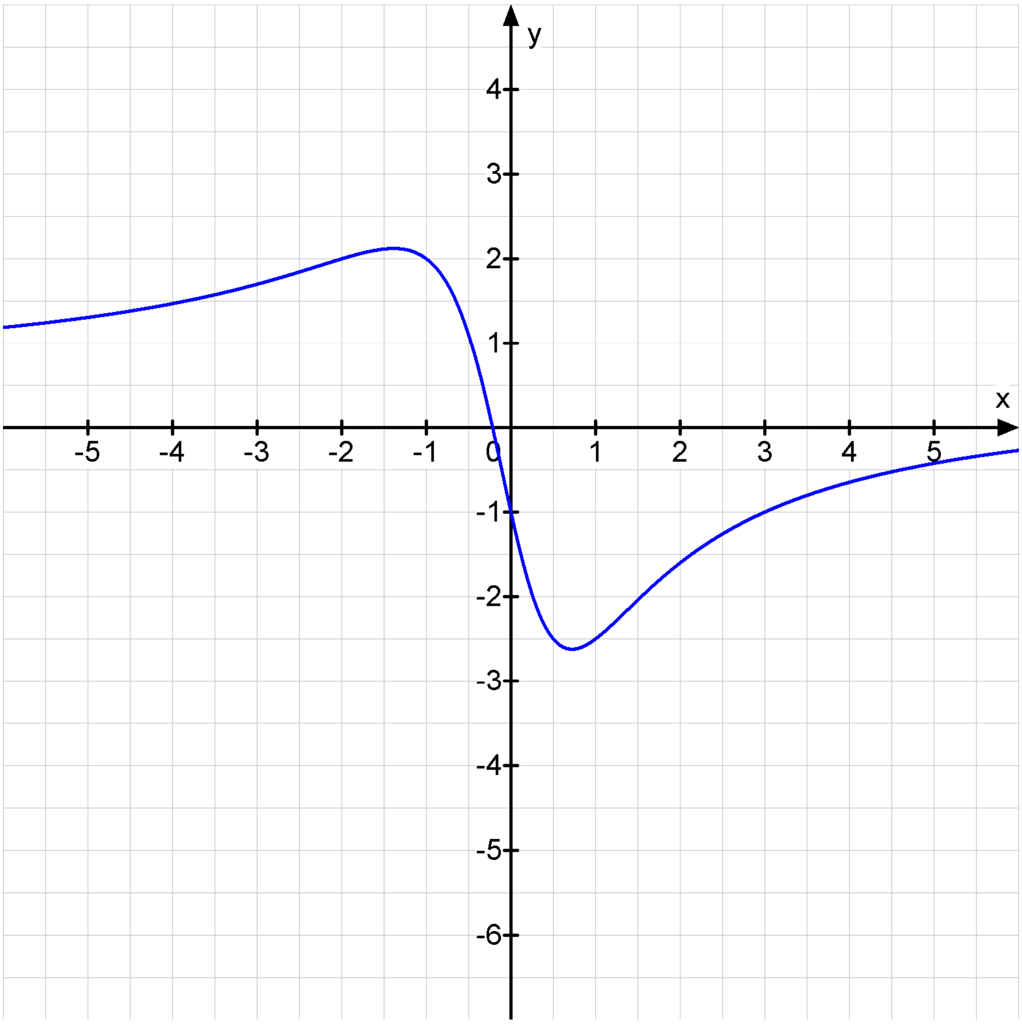


Gutes Gelingen! G.R.

Arbeitsblatt zur 3. Schulaufgabe aus der Mathematik, Klasse 11a , 22.04.2009

Name: ....

2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f.
   a) Tragen Sie in das Koordinatensystem möglichst genau den Graph der Ableitungsfunktion f ´ ein.
   b) Geben Sie näherungsweise die Intervalle an, in denen der Graph von f rechtsgekrümmt ist. Was bedeutet das für die zweite Ableitung von f ?



3. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 11a * 22.04.2009 * Lösung

1. a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 4x$ und $f'(1) = 3 - 4 = 1$

$\tan\varphi = -1 \;\Rightarrow\; \varphi = -45^o$

G_f schneidet die x-Achse unter einem Winkel von 45^o.

b) $f'(2) = 3\cdot 4 - 4\cdot 2 = 4 \;\Rightarrow\; m_N = -\frac{1}{4}$ und Normalengleichung $y = -0{,}25x + t$

P(2/1) in die Normalengleichung eingesetzt: $1 = -0{,}25\cdot 2 + t \;\Rightarrow\; t = 1{,}5$

Die Normalengleichung lautet also $y = -0{,}25x + 1{,}5$

2. Siehe Musterlösung des Arbeitsblatts!

3. a) $f(x) = 2\cdot(x^3 - 3x^2)^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2\cdot 2\cdot(x^3 - 3x^2)\cdot(3x^2 - 6x) = 12\cdot x^3(x-3)\cdot(x-2)$

$f'(0) = 0$, also hat G_f an der Stelle $x_1 = 0$ eine horizontale Tangente.

x	x < 0	0	0 < x < 2
f ´(x)	< 0	0	> 0

An der Stelle $x_1 = 0$ hat G_f also einen Tiefpunkt.

b) $f(x) = x^2\cdot\sqrt{x^2+1} \;\Rightarrow$

$$f'(x) = 2x\cdot\sqrt{x^2+1} + x^2\cdot\frac{1\cdot 2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x\cdot(x^2+1) + x^3}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{3x^3 + 2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x\cdot(3x^2+2)}{\sqrt{x^2+1}}$$

x	x < 0	0	0 < x
f ´(x)	< 0	0	> 0

An der Stelle $x_1 = 0$ hat G_f also einen Tiefpunkt.

4. Alle drei Winkel im gleichseitigen Kugeldreieck sind gleich groß. Es gilt:

$$r^2\cdot\pi\cdot\frac{\varepsilon}{180^o} = F_{Kugeldreieck} = 0{,}10\cdot 4r^2\pi = 0{,}4\, r^2\pi \;\Rightarrow\; \varepsilon = 0{,}4\cdot 180^o = 72^o$$

Also gilt $180^o + 72^o = \alpha + \beta + \gamma = 3\cdot\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = 84^o = \beta = \gamma$

5. a) Weg Richtung Westen auf dem Breitengrad:

Breitenkreisradius $\rho = r_{Erde}\cdot\cos(32{,}7^o) = 6370\text{km}\cdot\cos(32{,}7^o) = 5360\,\text{km}$

Weg x_1 auf dem Breitenkreis:

$$x_1 = 2\cdot\pi\cdot\rho\cdot\frac{157{,}8^o - 117{,}2^o}{360^o} = 2\cdot\pi\cdot 5360\,\text{km}\cdot\frac{40{,}6}{360} = 3798\,\text{km}$$

Weg x_2 auf dem Längenkreis:

$$x_2 = 2\cdot\pi\cdot r_{Erde}\cdot\frac{32{,}7^o - 21{,}3^o}{360^o} = 2\cdot\pi\cdot 6370\,\text{km}\cdot\frac{11{,}4}{360} = 1267\,\text{km}$$

Gesamte Weglänge : $x_1 + x_2 = 3798\,\text{km} + 1267\,\text{km} = 5065\,\text{km}$

b) Für die "Tunnellänge" x durch die Erde von San Diego zum Punkt A gilt:

$$\frac{0{,}5x}{\rho} = \sin\frac{157{,}8^o - 117{,}2^o}{2} \;\Rightarrow\; x = 2\cdot\rho\cdot\sin 20{,}3^o = 2\cdot 5360\,\text{km}\cdot\sin 20{,}3^o = 3719\,\text{km}$$

Für den Mittelpunktswinkel μ zur Tunnellänge x gilt:

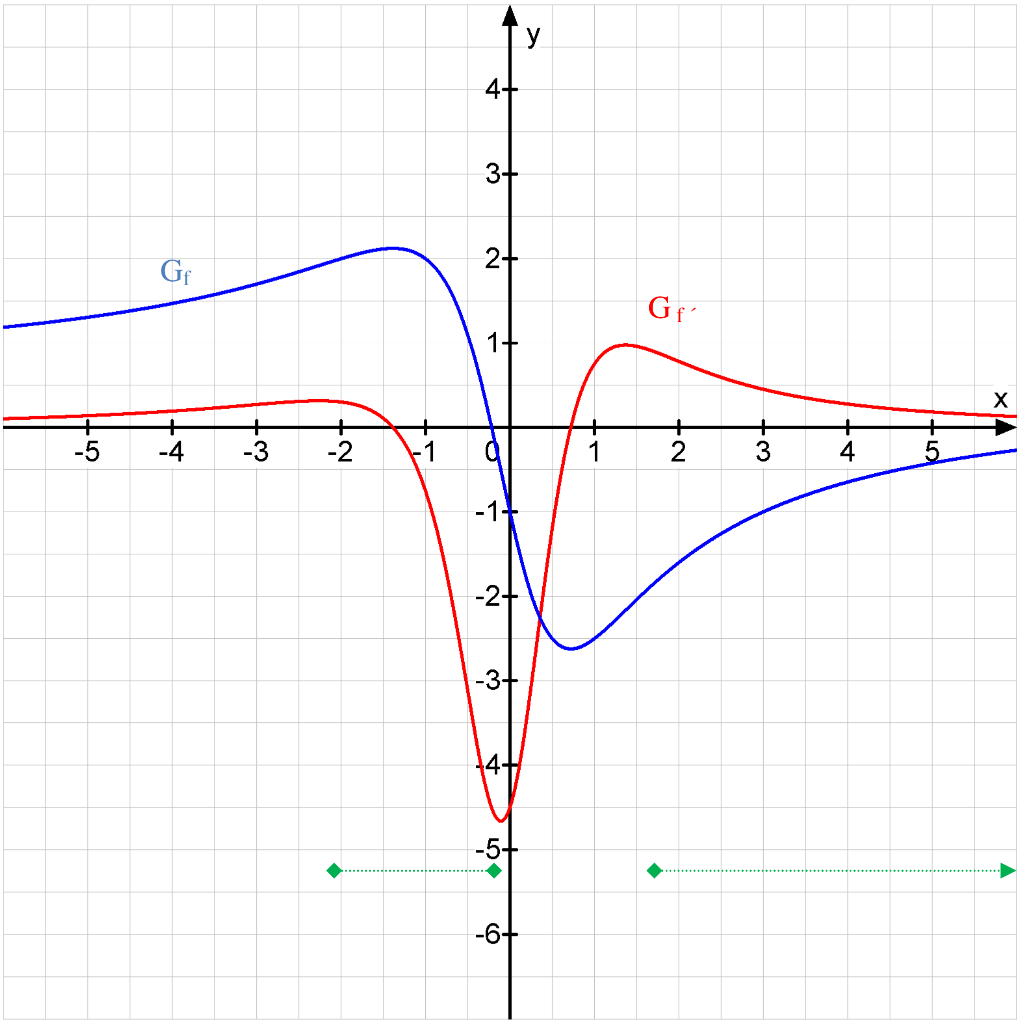
$$\frac{x/2}{r_{Erde}} = \sin\frac{\mu}{2} \;\Rightarrow\; \mu = 2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{3719\,\text{km}/2}{6370\,\text{km}}\right) = 33{,}9^o$$

Der kürzeste Weg von San Diego zum Punkt A beträgt also

$$d = 2\cdot\pi\cdot r_{Erde}\cdot\frac{\mu}{360^o} = 2\cdot\pi\cdot 6370\,\text{km}\cdot\frac{33{,}9^o}{360^o} = 3769\,\text{km}$$

Arbeitsblatt zur 3. Schulaufgabe aus der Mathematik, Klasse 11a , 22.04.2009 * Lösung

2. a)



2. b) Rechtskrümmung des Graphen von f ungefähr in den Intervallen [-2,2 ; - 0,1] und [1,3 ; ∞ [. In diesen Intervallen ist die zweite Ableitung von f negativ. (Und die erste Ableitung ist in diesen Intervallen monoton fallend!)