

## Jahrgangsstufe 11 \* Komplexe Zahlen

### Gleichungen in $\mathbb{C}$ , die sich auf quadratische und reine Gleichungen zurückführen lassen

1.  $3z^{16} = 2z^8 + 8$
2.  $z^3 + 3 = \frac{4}{z^3}$
3.  $z^{18} = -iz^9$
4.  $z^8 = 15z^4 + 16$
5.  $z^3 = 8z^{-3} + 7$
6.  $z^{10} + 2 = 2z^5$



Und nun noch zwei rechenaufwändige Gleichungen

7.  $z^3 + 1 = \frac{i}{z^3} + i$
8.  $z^8 + 4 = (4 + 2i)z^4 - 4i$

Lösungen:

1.  $z_k = \sqrt[8]{2} E(k \cdot 45^\circ)$  mit  $k = 0, 1, 2, \dots, 7$  und  
 $z_n = \sqrt[8]{\frac{4}{3}} E(22,5^\circ + n \cdot 45^\circ)$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots, 7$
2.  $z_1 = 1$ ;  $z_2 = E(120^\circ)$ ;  $z_3 = E(240^\circ)$ ;  $z_4 = \sqrt[3]{4} E(60^\circ)$ ;  $z_5 = \sqrt[3]{4} E(180^\circ)$ ;  $z_6 = \sqrt[3]{4} E(300^\circ)$
3.  $z_k = E(30^\circ + k \cdot 40^\circ)$  mit  $k = 0, 1, 2, \dots, 8$  sowie  $z_9 = 0$
4.  $z_1 = 2$ ;  $z_2 = 2i$ ;  $z_3 = -2$ ;  $z_4 = -2i$ ;  $z_5 = E(45^\circ)$ ;  $z_6 = E(135^\circ)$ ;  $z_7 = E(225^\circ)$ ;  $z_8 = E(315^\circ)$
5.  $z_1 = 2$ ;  $z_2 = 2E(120^\circ)$ ;  $z_3 = 2E(240^\circ)$ ;  $z_4 = E(60^\circ)$ ;  $z_5 = E(180^\circ) = -1$ ;  $z_6 = E(300^\circ)$
6.  $z_k = \sqrt[10]{2} E(9^\circ + k \cdot 72^\circ)$  bzw.  $z_n = \sqrt[10]{2} E(63^\circ + n \cdot 72^\circ)$  mit  $k, n = 0, 1, 2, \dots, 4$
7.  $z_1 = E(30^\circ)$ ;  $z_2 = E(150^\circ)$ ;  $z_3 = E(270^\circ) = -i$ ;  $z_4 = E(60^\circ)$ ;  $z_5 = E(180^\circ) = -1$ ;  $z_6 = E(300^\circ)$
8.  $z_1 = \sqrt[4]{2}$ ;  $z_2 = \sqrt[4]{2}i$ ;  $z_3 = -\sqrt[4]{2}$ ;  $z_4 = -\sqrt[4]{2}i$ ;  
 $z_5 = \sqrt[8]{8} E(11,25^\circ)$ ;  $z_6 = \sqrt[8]{8} E(101,25^\circ)$ ;  $z_7 = \sqrt[8]{8} E(191,25^\circ)$ ;  $z_8 = \sqrt[8]{8} E(281,25^\circ)$

Ausführliche Lösungen auf der Rückseite!

### Ausführliche Lösungen:

- $\tilde{z} = z^8$ ;  $3\tilde{z}^2 - 2\tilde{z} - 8 = 0 \Leftrightarrow \tilde{z}^2 - \frac{2}{3}\tilde{z} - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow (\tilde{z} - 2) \cdot (\tilde{z} + \frac{4}{3}) = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow z^8 = 2$  bzw.  $z^8 = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow z^8 = 2E(0^\circ)$  bzw.  $z^8 = \frac{4}{3}E(180^\circ)$   
 $z^8 = 2E(0^\circ)$  hat die Lösungen  $z_k = \sqrt[8]{2} E(k \cdot 45^\circ)$  mit  $k = 0, 1, 2, \dots, 7$   
 $z^8 = \frac{4}{3}E(180^\circ)$  hat die Lösungen  $z_n = \sqrt[8]{\frac{4}{3}} E(22,5^\circ + n \cdot 45^\circ)$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots, 7$
- $z^3 + 3 = \frac{4}{z^3} \Leftrightarrow z^6 + 3z^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow u^2 + 3u - 4 = 0$  mit  $u = z^3$   
 $(u+4) \cdot (u-1) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1$ ;  $u_2 = -4$  also  $z^3 = 1E(0^\circ)$  bzw.  $z^3 = 4E(180^\circ)$   
 $z^3 = 1E(0^\circ)$  hat die Lösungen  $z_1 = 1$ ;  $z_2 = E(120^\circ)$ ;  $z_3 = E(240^\circ)$   
 $z^3 = 4E(180^\circ)$  hat die Lösungen  $z_4 = \sqrt[3]{4} E(60^\circ)$ ;  $z_5 = \sqrt[3]{4} E(180^\circ)$ ;  $z_6 = \sqrt[3]{4} E(300^\circ)$
- $z^{18} = -iz^9 \Leftrightarrow z^9(z^9 + i) = 0 \Leftrightarrow z^9 = 0$  oder  $z^9 = -i = E(270^\circ)$   
also  $z_k = E(30^\circ + k \cdot 40^\circ)$  mit  $k = 0, 1, 2, \dots, 8$  sowie  $z_9 = 0$
- $z^8 = 15z^4 + 16 \Leftrightarrow u^2 - 15u - 16 = 0$  mit  $u = z^4 \Leftrightarrow (u-16) \cdot (u+1) = 0$   
also  $z^4 = 16$  bzw.  $z^4 = -1 = E(180^\circ)$ ; die Lösungen lauten damit  
 $z_1 = 2$ ;  $z_2 = 2i$ ;  $z_3 = -2$ ;  $z_4 = -2i$ ;  $z_5 = E(45^\circ)$ ;  $z_6 = E(135^\circ)$ ;  $z_7 = E(225^\circ)$ ;  $z_8 = E(315^\circ)$
- $z^3 = 8z^{-3} + 7 \Leftrightarrow z^6 - 7z^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow u^2 - 7u - 8 = 0$  mit  $u = z^3 \Leftrightarrow$   
 $(u-8) \cdot (u+1) = 0$  also  $z^3 = 8$  oder  $z^3 = -1 = E(180^\circ)$ ; die Lösungen lauten also  
 $z_1 = 2$ ;  $z_2 = 2E(120^\circ)$ ;  $z_3 = 2E(240^\circ)$ ;  $z_4 = E(60^\circ)$ ;  $z_5 = E(180^\circ) = -1$ ;  $z_6 = E(300^\circ)$
- $z^{10} + 2 = 2z^5 \Leftrightarrow u^2 - 2u + 2 = 0$  mit  $u = z^5 \Leftrightarrow (u-1)^2 = -1$  also  $u_{1/2} = 1 \pm i$   
 $z^5 = \sqrt{2} E(45^\circ)$  oder  $z^5 = \sqrt{2} E(315^\circ)$  ist also zu lösen; die Lösungen lauten damit  
 $z_k = \sqrt[10]{2} E(9^\circ + k \cdot 72^\circ)$  bzw.  $z_n = \sqrt[10]{2} E(63^\circ + n \cdot 72^\circ)$  mit  $k, n = 0, 1, 2, \dots, 4$
- $z^3 + 1 = \frac{i}{z^3} + i \Leftrightarrow z^6 + (1-i)z^3 - i = 0 \Leftrightarrow u^2 + (1-i)u - i = 0$  mit  $u = z^3$   
 $u^2 + (1-i)u - i = 0 \Leftrightarrow (u + \frac{1}{2}(1-i))^2 = \frac{1}{2}i \Leftrightarrow u_{1/2} = -\frac{1}{2}(1-i) \pm \frac{1}{\sqrt{2}} E(45^\circ)$   
 $u_{1/2} = -\frac{1}{2}(1-i) \pm \frac{1}{2}(1+i) \Leftrightarrow u_1 = i$ ;  $u_2 = -1$  also  $z^3 = E(90^\circ)$  bzw.  $z^3 = E(180^\circ)$   
 $z_1 = E(30^\circ)$ ;  $z_2 = E(150^\circ)$ ;  $z_3 = E(270^\circ) = -i$ ;  $z_4 = E(60^\circ)$ ;  $z_5 = E(180^\circ) = -1$ ;  $z_6 = E(300^\circ)$
- $z^8 + 4 = (4+2i)z^4 - 4i \Leftrightarrow u^2 - (4+2i)u + 4 + 4i = 0$  mit  $u = z^4$   
 $u^2 - (4+2i)u + 4 + 4i = 0 \Leftrightarrow [u - (2+i)]^2 - (2+i)^2 + 4 + 4i = 0 \Leftrightarrow$   
 $[u - (2+i)]^2 = -1 \Leftrightarrow [u - (2+i)]^2 = E(180^\circ) \Leftrightarrow u - (2+i) = \pm i$   
 $u_1 = 2$ ;  $u_2 = 2+2i = 2\sqrt{2} E(45^\circ)$  also  $z^4 = 2$  oder  $z^4 = 2\sqrt{2} E(45^\circ)$   
 $z_1 = \sqrt[4]{2}$ ;  $z_2 = \sqrt[4]{2}i$ ;  $z_3 = -\sqrt[4]{2}$ ;  $z_4 = -\sqrt[4]{2}i$ ;  
 $z_5 = \sqrt[8]{8} E(11,25^\circ)$ ;  $z_6 = \sqrt[8]{8} E(101,25^\circ)$ ;  $z_7 = \sqrt[8]{8} E(191,25^\circ)$ ;  $z_8 = \sqrt[8]{8} E(281,25^\circ)$