

Mathematik * Komplexe Zahlen * Jahrgangsstufe 11

Rechnen mit komplexen Zahlen

1. Geben Sie die komplexe Zahl in Polarform an. Runden Sie gegebenenfalls Winkel auf Hundertstel Grad und Längen auf Hundertstel genau.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ b) $\sqrt{3} - i$ c) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
d) $\sqrt{2} - \sqrt{6}i$ e) $2 - 3i$ f) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i$

2. Geben Sie die komplexe Zahl in Normalform an. Runden Sie gegebenenfalls auf Hundertstel genau.

a) $2 E(30^\circ)$ b) $\sqrt{2} E(135^\circ)$ c) $\sqrt{3} E(240^\circ)$
d) $0,5 E(1,5\pi)$ e) $3 E(140^\circ)$ f) $\sqrt{0,12} E(300^\circ)$
g) $2 E(225^\circ)$ h) $3 E(\frac{4}{3}\pi)$ i) $\sqrt{12} E(\frac{11}{6}\pi)$

3. Bestimmen Sie die Potenzen z^2 , z^3 , z^4 , der folgenden komplexen Zahlen.
Hinweis: In Polarform rechnet es sich deutlich leichter!

a) $z = E(60^\circ)$ b) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ c) $z = 2 E(45^\circ)$
d) $z = -i$ e) $z = 0,5i$ f) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen in \mathbb{C} .
Geben Sie Ihre Lösungen in Polar- und in Normalform an!

a) $z^2 = -8$ b) $z^3 = 1$ c) $z^4 = 1$
d) $z^4 = 81$ e) $z^3 = -1$ f) $z^4 = -1$



Lösungen:

1.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2E(45^\circ)$

b) $\sqrt{3} - i = 2E(330^\circ)$

c) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = E(60^\circ)$

d) $\sqrt{2} - \sqrt{6}i = 2\sqrt{2}E(300^\circ)$

e) $2 - 3i \approx \sqrt{13}E(303,69^\circ)$

f) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}i \approx \frac{1}{2}\sqrt{6}E(65,91^\circ)$

2.

a) $2E(30^\circ) = \sqrt{3} + i$

b) $\sqrt{2}E(135^\circ) = -1 + i$

c) $\sqrt{3}E(240^\circ) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $0,5E(1,5\pi) = -\frac{1}{2}i$

e) $3E(140^\circ) \approx -0,77 + 0,64i$

f) $\sqrt{0,12}E(300^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{10} - \frac{3}{10}i$

g) $2E(225^\circ) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

h) $3E(\frac{4}{3}\pi) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

i) $\sqrt{12}E(\frac{11}{6}\pi) = 3 - \sqrt{3}i$

3.

a) $z^2 = E(120^\circ)$; $z^3 = E(180^\circ) = -1$; $z^4 = E(240^\circ)$; $z^5 = E(300^\circ)$; $z^6 = 1$;
 $z^7 = z$; $z^8 = z^2$; $z^9 = z^3$; ...

b) $z^2 = i$; $z^3 = E(135^\circ)$; $z^4 = -1$; $z^5 = E(225^\circ)$; $z^6 = -i$; $z^7 = E(315^\circ)$; $z^8 = 1$;
 $z^9 = z$; $z^{10} = z^2$; $z^{11} = z^3$; ...

c) $z^2 = 4i$; $z^3 = 8E(135^\circ)$; $z^4 = -16$; $z^5 = 32E(225^\circ)$; $z^6 = -64i$;
 $z^7 = 128E(315^\circ)$; $z^8 = 256$; $z^9 = 2^9 \cdot z$; $z^{10} = 2^{10} \cdot z^2$; $z^{11} = 2^{11} \cdot z^3$; ...

d) $z^2 = -1$; $z^3 = i$; $z^4 = 1$; $z^5 = z$; $z^6 = z^2$; $z^7 = z^3$; ...

e) $z^2 = -\frac{1}{4}$; $z^3 = -\frac{1}{8}i$; $z^4 = \frac{1}{16}$; $z^5 = \frac{1}{32}z = \frac{1}{64}i$; $z^6 = \frac{1}{32}z^2 = -\frac{1}{128}$; ...

f) $z = E(300^\circ)$; $z^2 = E(240^\circ)$; $z^3 = E(180^\circ) = -1$; $z^4 = E(120^\circ)$; $z^5 = E(60^\circ)$; $z^6 = 1$;
 $z^7 = z$; $z^8 = z^2$; $z^9 = z^3$; ...

4.

a) $z_{1/2} = \pm 2\sqrt{2}i$

b) $z_1 = 1$; $z_2 = E(120^\circ)$; $z_3 = E(240^\circ)$

c) $z_1 = 1$; $z_2 = i$; $z_3 = -1$; $z_4 = -i$

d) $z_1 = 3$; $z_2 = 3i$; $z_3 = -3$; $z_4 = -3i$

e) $z_1 = E(60^\circ)$; $z_2 = -1$; $z_3 = E(300^\circ)$

f) $z_1 = E(45^\circ)$; $z_2 = E(135^\circ)$; $z_3 = E(225^\circ)$; $z_4 = E(315^\circ)$

