Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * Differenzierbarkeit von Funktionen

1. Prüfen Sie jeweils, ob die Funktion differenzierbar ist.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 4x^2 & ; \quad x < -1 \\ -2x & ; \quad -1 \le x < 2 \\ -0{,}5x^2 - 2 & ; \quad 2 \le x \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2x^3 + x^2 & ; \quad x < -1 \\ 1 - 2x^2 & ; \quad -1 \le x < 2 \\ 4x - x^3 - 5 & ; \quad 2 \le x \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} -4(x+1) & ; \quad x < -2 \\ x^2 & ; \quad -2 \le x \le 1 \\ 4\sqrt{x} & ; \quad 1 < x \end{cases}$

2. Kann man die Koeffizienten a, b und c so bestimmen, dass die Funktion differenzierbar ist?

a) $f(x) = \begin{cases} ax + \sin x & ; \quad x < 0 \\ bx^2 & ; \quad 0 \le x \le 4 \\ a\sqrt{x} + c & ; \quad 4 < x \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} ax^2 - x & ; \quad x < -1 \\ bx - a & ; \quad -1 \le x < 1 \\ 2 - cx^2 & ; \quad 1 \le x \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} ax + b & ; \quad x < -1 \\ cx^2 + x & ; \quad -1 \le x < 2 \\ \dfrac{4b}{x} & ; \quad 2 \le x \end{cases}$

d) $k(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & ; \quad x < -1 \\ 2bx + 1 & ; \quad -1 \le x \le 2 \\ cx^2 + 5 & ; \quad 2 < x \end{cases}$

Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * Differenzierbarkeit von Funktionen * Lösungen

1. a) f ist in R stetig.

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 8x & ; \quad x < -1 \\ -2 & ; \; -1 < x < 2 \\ -x & ; \quad 2 < x \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f'(x) = -2 = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f'(x) \\ \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f'(x) = -2 = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f'(x) \end{matrix}$$

f ist also auch an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ und damit in R differenzierbar mit $f'(-1) = -2$ und $f'(2) = -2$.

b) g ist an der Stelle $x_1 = -1$ stetig, aber an der Stelle $x_2 = 2$ unstetig und daher bei x_2 nicht differenzierbar.

$$g'(x) = \begin{cases} 6x^2 + 2x & ; \quad x < -1 \\ -4x & ; \; -1 < x < 2 \\ 4 - 3x^2 & ; \quad 2 < x \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} g'(x) = 6 - 2 = 4 = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} g'(x)$$

g ist damit an der Stelle $x_1 = -1$ differenzierbar mit $g'(-1) = 4$.

c) h ist an der Stelle $x_1 = -2$ stetig, aber an der Stelle $x_2 = 1$ unstetig und daher bei x_2 nicht differenzierbar.

$$h'(x) = \begin{cases} -4 & ; \quad x < -2 \\ 2x & ; \; -2 < x < 1 \\ 2x^{-0,5} & ; \quad 1 < x \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} h'(x) = -4 = 2 \cdot (-2) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} h'(x)$$

h ist damit an der Stelle $x_1 = -2$ differenzierbar mit $h'(-2) = -4$.

2. a) f ist bei $x_1 = 0$ immer stetig und bei $x_2 = 4$ stetig, falls (1) $16b = 2a + c$ gilt.
f ist bei $x_1 = 0$ differenzierbar, wenn (2) $a + 1 = 0$ gilt.
f ist bei $x_2 = 4$ differenzierbar, wenn (3) $8b = a/4$ gilt.
Die drei Gleichungen sind für $a = -1$, $b = -1/32$ und $c = 1,5$ gültig; für diese Werte ist damit f differenzierbar mit $f'(0) = 0$ und $f'(4) = -0,25$.

b) g ist bei $x_1 = -1$ stetig, falls (1) $a + 1 = -b - a$ gilt.
g ist bei $x_1 = 1$ stetig, falls (2) $b - a = 2 - c$ gilt.
g ist bei $x_1 = -1$ differenzierbar, falls (3) $-2a - 1 = b$ gilt.
g ist bei $x_1 = -1$ differenzierbar, falls (4) $b = -2c$ gilt.
Für $a = -1,25$ und $b = 1,5$ und $c = -0,75$ sind (1), (2), (3) und (4) erfüllt, g also stetig und differenzierbar mit $g'(-1) = -3,5$ und $g'(1) = -3,5$.

c) h ist bei $x_1 = -1$ stetig, falls (1) $-a + b = c - 1$ gilt.
h ist bei $x_1 = 2$ stetig, falls (2) $4c + 2 = 2b$ gilt.
h ist bei $x_1 = -1$ differenzierbar, falls (3) $a + b = -2c + 1$ gilt.
h ist bei $x_1 = 2$ differenzierbar, falls (4) $4c + 1 = -b$ gilt.
Alle 4 Gleichungen lassen sich nicht erfüllen. Gleichung (1) und (2) müssen aber erfüllt sein!
Für $a = 1,6$ und $b = 0,2$ und $c = -0,4$ sind (1), (2) und (3) erfüllt, h also stetig und bei $x_1 = -1$ differenzierbar.
(4) ist dann nicht erfüllt, h also bei $x_2 = 2$ dann nicht differenzierbar.
Für $a = 5/3$ und $b = 1/3$ und $c = -1/3$ sind (1), (2) und (4) erfüllt, h also stetig und bei $x_2 = 2$ differenzierbar.
(3) ist dann nicht erfüllt, h also bei $x_1 = -1$ dann nicht differenzierbar.

d) k ist bei $x_1 = -1$ stetig, falls (1) $a + b = 1$ gilt.
k ist bei $x_1 = 2$ stetig, falls (2) $b - c = 1$ gilt.
k ist bei $x_1 = -1$ differenzierbar, falls (3) $-2a + b = 2b$ gilt.
h ist bei $x_1 = 2$ differenzierbar, falls (4) $2b = 4c$ gilt.
Für $a = -1$ und $b = 2$ und $c = 1$ sind (1), (2), (3) und (4) erfüllt, k also stetig und differenzierbar mit $k'(-1) = -3$ und $k'(2) = 5$.