1. Extemporale aus der Mathematik, Klasse 11a, 15.10.2008
Gruppe A

1. Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = 2 \cdot \sqrt{9 - x^2}$.
   a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_f und alle Nullstellen von f. Besitzt der Graph G_f eine Symmetrie?
   b) Begründen Sie kurz, warum die Funktion f im Intervall $[0;3]$ umkehrbar ist und ermitteln Sie den Funktionsterm der zugehörigen Umkehrfunktion. Geben Sie für diese Umkehrfunktion den Definitionsbereich und den Wertebereich an!

2. Die Betragsfunktion $g(x) = \left|2x - 3\right| - 2$ soll untersucht werden.
   a) Geben Sie den Funktionsterm g(x) abschnittsweise ohne Verwendung von Betragsstrichen an. Zeichnen Sie den Graphen von g sauber in ein Koordinatensystem.
   b) Berechnen Sie die Größe des „Knickwinkels“ φ des Graphen von g (auf $0{,}1^\circ$ genau). Tragen Sie φ auch in Ihrer Zeichnung ein.

Aufgabe	1a	b	2a	b	Summe
Punkte	3	5	3	3	14

Gutes Gelingen! G.R.

1. Extemporale aus der Mathematik, Klasse 11a, 15.10.2008
Gruppe B

1. Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = 3 \cdot \sqrt{4 - x^2}$.
   a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_f und alle Nullstellen von f. Besitzt der Graph G_f eine Symmetrie?
   b) Begründen Sie kurz, warum die Funktion f im Intervall $[0;2]$ umkehrbar ist und ermitteln Sie den Funktionsterm der zugehörigen Umkehrfunktion. Geben Sie für diese Umkehrfunktion den Definitionsbereich und den Wertebereich an!

2. Die Betragsfunktion $g(x) = \left|2x - 3\right| - 1$ soll untersucht werden.
   a) Geben Sie den Funktionsterm g(x) abschnittsweise ohne Verwendung von Betragsstrichen an. Zeichnen Sie den Graphen von g sauber in ein Koordinatensystem.
   b) Berechnen Sie die Größe des „Knickwinkels“ φ des Graphen von g (auf $0{,}1^\circ$ genau). Tragen Sie φ auch in Ihrer Zeichnung ein.

Aufgabe	1a	b	2a	b	Summe
Punkte	3	5	3	3	14

Gutes Gelingen! G.R.

1. Extemporale aus der Mathematik, Klasse 11a, 15.10.2008 * Lösung
Gruppe A

1. a) $f(x) = 2\cdot\sqrt{9-x^2}$; $9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$ also $D_f = [-3\,;\,3]$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{9-x^2} = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 3$

$f(-x) = 2\cdot\sqrt{9-(-x)^2} = 2\cdot\sqrt{9-x^2} = f(x) \Rightarrow$ G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) f ist im Intervall [0;3] streng monoton fallend und daher umkehrbar.

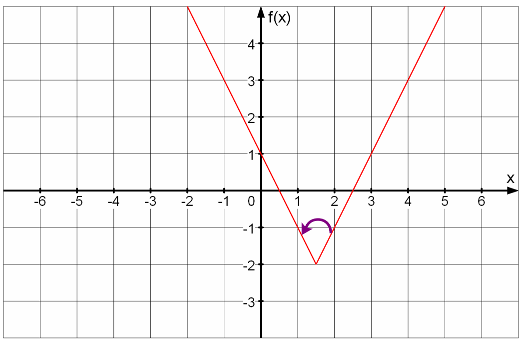
$f_1(x) = 2\cdot\sqrt{9-x^2}$ mit $D_{f_1} = [0;3]$ und $W_{f_1} = [0;6]$

$f_1^{-1}:\; x = 2\cdot\sqrt{9-y^2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \sqrt{9-y^2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 9 - y^2 \Rightarrow y^2 = 9 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow$

$y = \pm\sqrt{9-\frac{x^2}{4}}$ und wegen $W_{f_1^{-1}} = D_{f_1} = [0;3]$ gilt damit

$f_1^{-1}(x) = +\sqrt{9-\frac{x^2}{4}}$ mit $D_{f_1^{-1}} = [0;6]$ und $W_{f_1^{-1}} = [0;3]$

2. a) $g(x) = |2x-3| - 2 = \begin{cases} 2x - 5 & \text{für } x \geq 1{,}5 \\ -2x + 1 & \text{für } x < 1{,}5 \end{cases}$



b) $\tan(\varphi) = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1\cdot m_2}\right| = \left|\frac{2-(-2)}{1+2\cdot(-2)}\right| = \frac{4}{3} \Rightarrow \varphi = 53{,}130...^\circ \approx 53{,}1^\circ$

1. Extemporale aus der Mathematik, Klasse 11a, 15.10.2008 * Lösung
Gruppe B

1. a) $f(x) = 3 \cdot \sqrt{4 - x^2}$; $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$ also $D_f = [-2\,;\,2]$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt{4 - x^2} = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$

$f(-x) = 3 \cdot \sqrt{4 - (-x)^2} = 3 \cdot \sqrt{4 - x^2} = f(x) \Rightarrow$ G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) f ist im Intervall [0;2] streng monoton fallend und daher umkehrbar.

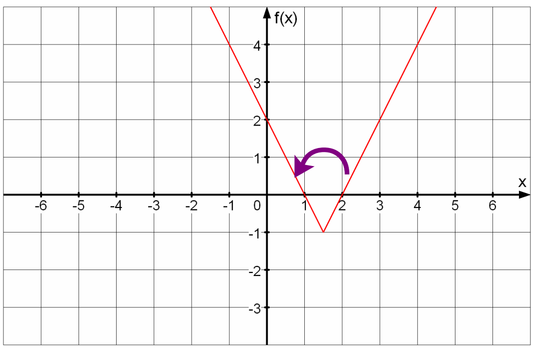
$f_1(x) = 3 \cdot \sqrt{4 - x^2}$ mit $D_{f_1} = [0;2]$ und $W_{f_1} = [0;6]$

$f_1^{-1}: \quad x = 3 \cdot \sqrt{4 - y^2} \Rightarrow \frac{x}{3} = \sqrt{4 - y^2} \Rightarrow \frac{x^2}{9} = 4 - y^2 \Rightarrow y^2 = 4 - \frac{x^2}{9} \Rightarrow$

$y = \pm\sqrt{4 - \frac{x^2}{9}}$ und wegen $W_{f_1^{-1}} = D_{f_1} = [0;2]$ gilt damit

$f_1^{-1}(x) = +\sqrt{4 - \frac{x^2}{9}}$ mit $D_{f_1^{-1}} = [0;6]$ und $W_{f_1^{-1}} = [0;2]$

2. a) $g(x) = |2x - 3| - 1 = \begin{cases} 2x - 4 & \text{für } x \geq 1{,}5 \\ -2x + 2 & \text{für } x < 1{,}5 \end{cases}$



b) $\tan(\varphi) = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{2 - (-2)}{1 + 2 \cdot (-2)}\right| = \frac{4}{3} \Rightarrow \varphi = 53{,}130...^\circ \approx 53{,}1^\circ$