1. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 11a * 17.11.2008 * Gruppe A

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{5x^3}{\sqrt{8-2x^2}}$.

   Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von f.
   Prüfen Sie den Graphen der Funktion auf Symmetrie.

2. Die Funktion f mit $f(x) = |2x-4| - x$ soll untersucht werden.

   a) Geben Sie die Funktion abschnittsweise ohne Verwendung von Betragsstrichen an.

   b) Zeichnen Sie den Graphen von f sauber in ein Koordinatensystem und berechnen Sie den „Knickwinkel".

3. Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze den Grenzwert $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 3x}{5 + x^2}$.

   Zeigen Sie dann mit der exakten Definition des Grenzwertes, dass Ihr gefundener Wert für a korrekt ist.

4. Bestimmen Sie – sofern vorhanden –folgende Grenzwerte mit Hilfe der Grenzwertsätze.

   a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x + |x|}{4 - 5x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x \cdot (x-1)}{4 - 5x}$

5. Berechnen Sie den Term und geben Sie das Ergebnis in Normalform an.

   $$\frac{5E(155^\circ) \cdot i}{\sqrt{2}\, E(20^\circ)} + 3 + i =$$

6. Bestimmen Sie jeweils die Lösung in der Grundmenge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

   a) $(i + z) \cdot (4 + 3i) - 5i = 15$

   b) $i \cdot z + 2 \cdot z^* = 7 + 8i$ (z^* gibt die zu z konjugiert komplexe Zahl an.)

Aufgabe	1	2a	b	3	4a	b	5	6a	b	Summe
Punkte	5	3	5	7	2	2	5	5	6	40

Gutes Gelingen! G.R.

1. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 11a * 17.11.2008 * Gruppe B

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt{18 - 2x^2}}$.

   Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und alle Nullstellen von f.
   Prüfen Sie den Graphen der Funktion auf Symmetrie.

2. Die Funktion f mit $f(x) = |2x - 2| - x$ soll untersucht werden.

   a) Geben Sie die Funktion abschnittsweise ohne Verwendung von Betragsstrichen an.

   b) Zeichnen Sie den Graphen von f sauber in ein Koordinatensystem und berechnen Sie den „Knickwinkel".

3. Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze den Grenzwert $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 5x}{2 + x^2}$.

   Zeigen Sie dann mit der exakten Definition des Grenzwertes, dass Ihr gefundener Wert für a korrekt ist.

4. Bestimmen Sie – sofern vorhanden –folgende Grenzwerte mit Hilfe der Grenzwertsätze.

   a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x + |x|}{3 - 5x}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x \cdot (x-3)}{2 - 5x}$

5. Berechnen Sie den Term und geben Sie das Ergebnis in Normalform an.

   $\dfrac{3E(165^\circ) \cdot i}{\sqrt{2}\, E(30^\circ)} + 2 + i =$

6. Bestimmen Sie jeweils die Lösung in der Grundmenge C der komplexen Zahlen.

   a) $(i + z) \cdot (3 + 4i) - 2i = 14$

   b) $i \cdot z + 2 \cdot z^* = 8 + 7i$ (z^* gibt die zu z konjugiert komplexe Zahl an.)

Aufgabe	1	2a	b	3	4a	b	5	6a	b	Summe
Punkte	5	3	5	7	2	2	5	5	6	40

Gutes Gelingen! G.R.

1. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 11a * 17.11.2008 * Gruppe A * Lösung

1. D_f: $8-2x^2>0 \Leftrightarrow 2x^2<8 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2$ also $D_f =]-2\,;+2[$.

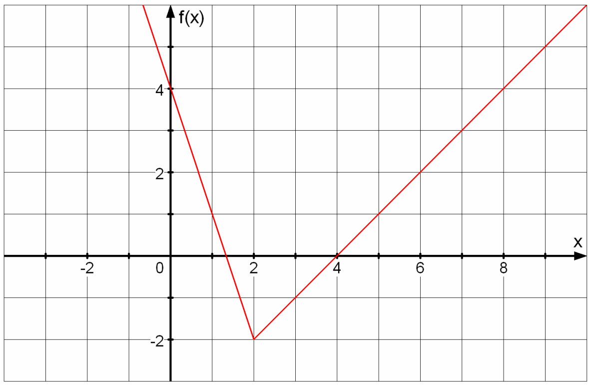
NSt.: $f(x)=0 \Leftrightarrow 5x^3=0 \Leftrightarrow x=0$ Es gibt nur die eine Nullstelle $x_1 = 0$.

Symmetrie: $f(-x) = \dfrac{5(-x)^3}{\sqrt{8-2(-x)^2}} = \dfrac{-5x^3}{\sqrt{8-2x^2}} = -f(x)$

Also ist G_f punktsymmetrisch zum Ursprung.

2. a) $f(x) = |2x-4| - x =$

$$= \begin{cases} 2x-4-x = x-4 & \text{falls } x \geq 2 \\ -(2x-4)-x = -3x+4 & \text{falls } x<2 \end{cases}$$



b) Knickwinkel φ:

$$\tan\varphi = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1\cdot m_2}\right| = \left|\frac{1-(-3)}{1-1\cdot 3}\right| = \frac{4}{2} = 2$$

$\Rightarrow \varphi = 63{,}43...^\circ \approx 63{,}4^\circ$

3. $$a = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{5+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot(2x^2-3x)}{\frac{1}{x^2}\cdot(5+x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{\frac{5}{x^2}+1} = \frac{2-0}{0+1} = 2$$

Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $x_o = \max\left(10\,;\frac{4}{\varepsilon}\right)$, so dass für alle $x \geq x_o$ gilt:

$$\left|\frac{2x^2-3x}{5+x^2}-2\right| = \left|\frac{2x^2-3x}{5+x^2}-\frac{10+2x^2}{5+x^2}\right| = \left|\frac{-3x-10}{5+x^2}\right| = \left|\frac{3x+10}{5+x^2}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{3x+x}{5+x^2}\right| < \left|\frac{4x}{x^2}\right| = \frac{4}{x} \leq \frac{4}{x_o} \leq \varepsilon$$

4. a) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+|x|}{4-5x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-x}{4-5x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{4-5x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\frac{4}{x}-5} = \frac{2}{-0-5} = -0{,}4$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x\cdot(x-1)}{4-5x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-3x}{4-5x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-3}{\frac{4}{x}-5} = \text{"}\frac{-\infty-3}{-0-5}\text{"} = +\infty$$

5. $$\frac{5E(155^\circ)\cdot i}{\sqrt{2}\,E(20^\circ)} + 3+i = \frac{5\,E(135^\circ)\cdot i}{\sqrt{2}} + 3+i = \frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i\right)\cdot i + 3+i =$$

$$\left(-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i\right)\cdot i + 3+i = -\frac{5}{2}i-\frac{5}{2}+3+i = 0{,}5-1{,}5i$$

6. a) $$(i+z)\cdot(4+3i)-5i = 15 \Leftrightarrow i+z = \frac{15+5i}{4+3i} \Leftrightarrow z = \frac{(15+5i)\cdot(4-3i)}{(4+3i)\cdot(4-3i)} - i \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{60-45i+20i+15}{16+9} - i = \frac{75-25i}{25} - i = 3-2i$$

b) Mit $z = x+y\cdot i$ und $z^* = x-y\cdot i$ folgt:

$i\cdot z + 2\cdot z^* = 7+8i \Leftrightarrow i\cdot x - y + 2x - 2y\cdot i = 7+8i \Leftrightarrow$

(1) $2x-y=7$ und (2) $x-2y=8$ d.h. $x = 8+2y$ eingesetzt in (1)

$16+4y-y=7 \Rightarrow 3y=-9 \Rightarrow y=-3$ und $x = 8-6 = 2$ also $z = 2-3i$

1. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 11a * 17.11.2008 * Gruppe B * Lösung

1. D_f: $18 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 < 18 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow -3<x<3$ also $D_f =]-3\,;+3[$.

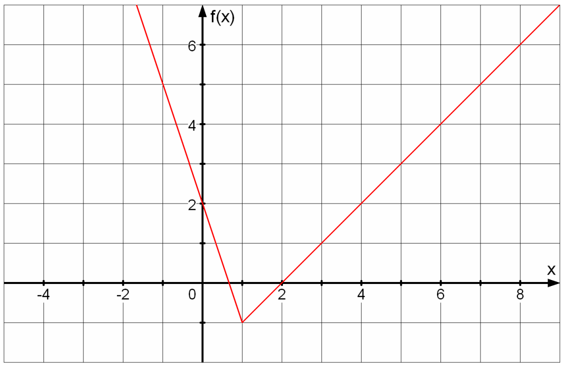
   NSt.: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x=0$ Es gibt nur die eine Nullstelle $x_1 = 0$.

   Symmetrie: $f(-x) = \dfrac{2(-x)^3}{\sqrt{18-2(-x)^2}} = \dfrac{-2x^3}{\sqrt{18-2x^2}} = -f(x)$

   Also ist G_f punktsymmetrisch zum Ursprung.

2. a) $f(x) = |2x-2| - x =$

$$= \begin{cases} 2x-2-x = x-2 & \text{falls } x \ge 1 \\ -(2x-2)-x = -3x+2 & \text{falls } x < 1 \end{cases}$$



   b) Knickwinkel φ:

$$\tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1+m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{1-(-3)}{1-1\cdot 3}\right| = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \varphi = 63{,}43...^\circ \approx 63{,}4^\circ$$

3. $$a = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-5x}{2+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot(3x^2-5x)}{\frac{1}{x^2}\cdot(2+x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{5}{x}}{\frac{2}{x^2}+1} = \frac{3-0}{0+1} = 3$$

   Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_o = \max\left(6\,;\frac{6}{\varepsilon}\right)$, so dass für alle $x \ge x_o$ gilt:

$$\left|\frac{3x^2-5x}{2+x^2} - 3\right| = \left|\frac{3x^2-5x}{2+x^2} - \frac{6+3x^2}{2+x^2}\right| = \left|\frac{-5x-6}{2+x^2}\right| = \left|\frac{5x+6}{2+x^2}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{5x+x}{2+x^2}\right| < \left|\frac{6x}{x^2}\right| = \frac{6}{x} \le \frac{6}{x_o} \le \varepsilon$$

4. a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x+|x|}{3-5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x-x}{3-5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{3-5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\frac{3}{x}-5} = \frac{3}{-0-5} = -0{,}6$$

   b) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x\cdot(x-3)}{2-5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-12x}{2-5x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x-12}{\frac{2}{x}-5} = \text{"}\frac{-\infty-12}{-0-5}\text{"} = +\infty$$

5. $$\frac{3E(165^\circ)\cdot i}{\sqrt{2}\,E(30^\circ)} + 2 + i = \frac{3E(135^\circ)\cdot i}{\sqrt{2}} + 2 + i = \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,i\right)\cdot i + 2 + i =$$

$$\left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right)\cdot i + 2 + i = -\frac{3}{2}i - \frac{3}{2} + 2 + i = 0{,}5 - 0{,}5i$$

6. a) $$(i+z)\cdot(3+4i) - 2i = 14 \Leftrightarrow i + z = \frac{14+2i}{3+4i} \Leftrightarrow z = \frac{(14+2i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} - i \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{42-56i+6i+8}{16+9} - i = \frac{50-50i}{25} - i = 2-3i$$

   b) Mit $z = x + y\cdot i$ und $z^* = x - y\cdot i$ folgt:

   $i\cdot z + 2\cdot z^* = 8 + 7i \Leftrightarrow i\cdot x - y + 2x - 2y\cdot i = 8 + 7i \Leftrightarrow$

   (1) $2x - y = 8$ und (2) $x - 2y = 7$ d.h. $x = 7+2y$ eingesetzt in (1)

   $14 + 4y - y = 8 \Rightarrow 3y = -6 \Rightarrow y = -2$ und $x = 7-4 = 3$ also $z = 3 - 2i$