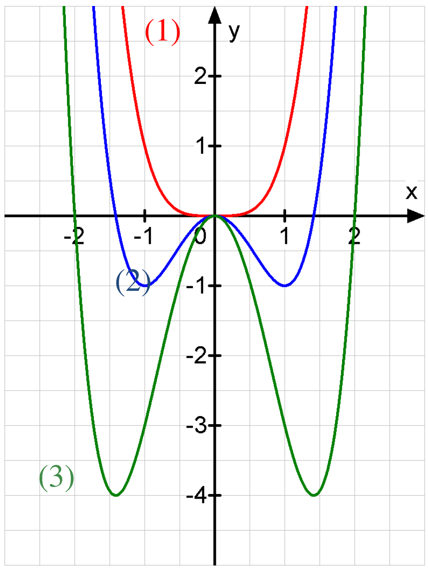
4. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 11a * 17.06.2009



1) Das Bild zeigt drei Graphen der Funktionenschar

$f_k(x) = x^4 + 0{,}5 \cdot k \cdot x^2$ mit $k \in R_o^-$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen und alle Tiefpunkte in Abhängigkeit von k.

[Ergebnis: TIP$(\pm \frac{\sqrt{-k}}{2} \cdot / -\frac{1}{16} \cdot k^2)$]

b) Welche Parameterwerte gehören zu den drei abgebildeten Graphen (1), (2) und (3) der Schar? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Bestimmen Sie die Kurve, auf der die Tiefpunkte dieser Schar liegen.
Geben Sie dazu den zugehörigen Funktionsterm $t(x)$ und den Definitionsbereich der Funktion t an!

2. Eine Polynomfunktion dritten Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ soll die Nullstelle $x_1 = 3$ besitzen und zusätzlich an der Stelle $x_2 = 1$ einen Wendepunkt mit der Wendetangente $y = 2x + 2$ haben.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes und dann die passenden Werte für a, b, c und d. [Ergebnis: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 3$]

b) Begründen Sie, dass die in a) gefundene Funktion außer $x_1 = 3$ keine weitere Nullstelle hat.

3. Die Fluggesellschaft All Nippon Airways will einen Direktflug von München nach Tokio anbieten.
Der Flug vom Flughafen München Franz Joseph Strauß (48,1° nördl./11,7° östl.) zum Flughafen Tokio Narita (35,8° nördl./ 140,4° östl.) soll auf der kürzest möglichen Strecke erfolgen.
(Erdradius: $R = 6370$ km)

a) Wie lange dauert dann der Direktflug bei einer durchschnittlichen Reisegeschwindigkeit von 900 Kilometer pro Stunde? Fertigen Sie eine übersichtliche, beschriftete Skizze an!
[Teilergebnis: Flugstrecke x entspricht 84,5°]

b) Unter welchem Kurswinkel muss das Flugzeug dabei in München starten?
[Ergebnis: 39,5°]

c) Der Flug führt in polarnahe Regionen. Bestimmen Sie den minimalen Abstand der Flugroute vom Nordpol.
(Hinweis: Beim minimalen Abstand fliegt das Flugzeug unter einem 90°-Winkel zum Längenkreis!)

Aufgabe	1a	b	c	2a	b	3a	b	c	Summe
Punkte	9	6	5	7	3	9	5	6	50

Gutes Gelingen! G.R.

4. Schulaufgabe aus der Mathematik * Klasse 11a * 17.06.2009 * Lösung

1. a) Nullstellen:

$f_k(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 \cdot (x^2 + 0{,}5k) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0$ (doppelte NSt.) ; $x_{2/3} = \pm 0{,}5\sqrt{-2k}$

$f_k'(x) = 4x^3 + k \cdot x$ und $f_k''(x) = 12x^2 + k$

Horizontale Tangenten: $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (4x^2 + k) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_{4/5} = \pm\, 0{,}5 \cdot \sqrt{-k}$

für $k < 0$ gilt: $f_k''(x_1) = k \Rightarrow$ HOP(0/0) ; $f_k''(x_{4/5}) = -3k + k = -2k \Rightarrow$ TIP$(x_{4/5} / y_{4/5})$

$y_{4/5} = \frac{1}{16}(-k)^2 + \frac{1}{8} \cdot k \cdot (-k) = -\frac{1}{16}k^2$ also TIP $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{-k} \;/\; -\frac{1}{16}k^2)$ für $k < 0$

für $k = 0$ gilt: $f_0(x) = x^4$ hat nur den einen Extrempunkt TIP(0/0), der Tiefpunkt ist.

b) zu (1) gehört $k = 0$, denn der Graph hat keinen Hochpunkt.

Zu (2) gehört $k = -4$, denn TIP (1/1) bedeutet $0{,}5 \cdot \sqrt{-k} = 1$,d.h. $-k = 2^2$

Zu (3) gehört $k = -8$, denn die Nullstelle $x_2 = 2$ bedeutet $0{,}5\sqrt{-2k} = 2$ d.h. $-2k = 4^2$

c) $x_{4/5} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-k}$ mit $k \le 0$, d.h. $x \in R$ und $y_{4/5} = -\frac{1}{16}k^2$

$x_{TP} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-k} \Rightarrow 4x_{TP}^2 = -k \Rightarrow k = -4x_{TP}^2$

in $y_{TP} = -\frac{1}{16}k^2 = -\frac{1}{16} \cdot 16x_{TP}^4 = -x_{TP}^4$, d.h. $t(x) = -x^4$ mit $x \in R$

2. a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$

(1) $f(3) = 0$; (2) $f''(1) = 0$; (3) $f'(1) = 2$; (4) $f(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$ d.h. WP(1/4)

(1) $0 = 27a + 9b + 3c + d$	(1) $0 = 3c + d \Rightarrow d = -3c$ in (3),(4)
(2) $0 = 6a + 2b \Rightarrow b = -3a$ in (1), (3), (4)	
(3) $2 = 3a + 2b + c$	(3) $2 = -3a + c$
(4) $4 = a + b + c + d$	(4) $4 = -2a + c + d$

(3) $2 = -3a + c \Rightarrow c = 2 + 3a$ in (4)

(4) $4 = -2a - 2c$ (4) $4 = -4 - 8a \Rightarrow a = -1$

$\Rightarrow c = 2 + 3a = -1$ und $b = -3a = 3$ und $d = -3c = 3$

Also $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 3$

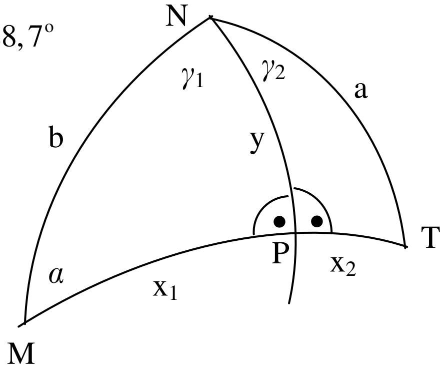
b) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 3 = (x-3) \cdot (-x^2 - 1)$ (Polynomdivision)

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = (x-3) \cdot (-x^2 - 1) \Leftrightarrow x_1 = 3$ oder $x^2 = -1$

Da $x^2 = -1$ keine reelle Lösung hat, besitzt f nur die eine Nullstelle $x_1 = 3$

3. a) $a = 90^\circ - 35{,}8^\circ = 54{,}2^\circ$; $b = 90^\circ - 48{,}1^\circ = 41{,}9^\circ$

$x_1 + x_2 = x$; $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$; $\gamma = 140{,}4^\circ - 11{,}7^\circ = 128{,}7^\circ$



$\cos x = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma = 0{,}0967...$

$\Rightarrow \quad x = 84{,}45^\circ \mathrel{\hat{=}} 9389\,\text{km}$

Flugzeit $t = \dfrac{9389\,\text{km}}{900\,\text{km/h}} = 10{,}4\,\text{h}$

b) $\cos a = \cos b \cdot \cos x + \sin b \cdot \sin x \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cdot \cos x}{\sin b \cdot \sin x} = 0{,}7717... \Rightarrow$

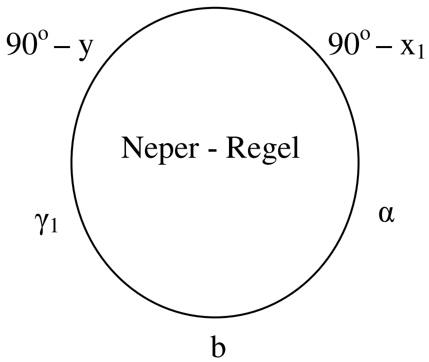
Kurswinkel $\alpha = 39{,}490...^\circ \approx 39{,}5^\circ$

c) $\cos(90^\circ - y) = \sin\alpha \cdot \sin b = 0{,}4247...$

oder auch mit dem Sinus-Satz :

$\dfrac{\sin y}{\sin b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \sin y = \sin\alpha \cdot \sin b = 0{,}4247...$

$\Rightarrow y = 25{,}13^\circ \mathrel{\hat{=}} 2794\,\text{km}$



Der minimale Abstand vom Nordpol beträgt also 2794 km.