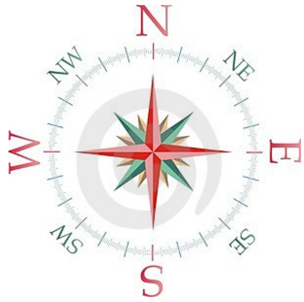
Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * Allgemeines sphärisches Dreieck
Entfernung zweier Erdorte * Kurswinkel in See- und Luftfahrt



Für die Berechnung am allgemeinen Kugeldreieck verwendet man den Sinus-, den Seitenkosinus- und den Winkelkosinussatz.

Sinussatz: $\sin(a) : \sin(b) : \sin(c) = \sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma)$
Seitenkosinussatz: $\cos(a) = \cos(\alpha) \sin(b) \sin(c) + \cos(b) \cos(c)$
Winkelkosinussatz: $\cos(\alpha) = \cos(a) \sin(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\beta) \cos(\gamma)$

Beachte bei der Lösung von Aufgaben am allgemeinen Kugeldreieck:

Es gilt immer:	$a < b \iff \alpha < \beta$	und analoge Aussagen
	$a + b > c$	und analoge Aussagen
	$a + b \geq 180^\circ \iff \alpha + \beta \geq 180^\circ$	und analoge Aussagen
	$a + b \leq 180^\circ \iff \alpha + \beta \leq 180^\circ$	und analoge Aussagen

Für die Umrechnung vom Winkel- in das zugehörige Längenmaß gilt auf der Erdkugel:

1° entspricht 111,1km, d.h. 1' entspricht 1,852km = 1 Seemeile = 1sm
und 1 Knoten = 1 Seemeile pro Stunde

Aufgaben:

1. In einem Kugeldreieck auf der Erde gilt:
   $a : b = 2 : 3$ und a entspricht 10,0% des Erdumfangs; ferner $\beta = 30{,}0^\circ$.
   Berechnen Sie α .

2. Ein Schiff fährt auf dem kürzesten Weg von Lissabon (9°11' w / 38°52' n) nach Rio de Janeiro (43,2° w / 22,9° s). Bestimmen Sie die beiden Kurswinkel und die Fahrzeit, wenn das Schiff eine Reisegeschwindigkeit von 18 Knoten hat.

3. Ein Schiff fährt von Rio de Janeiro (vgl. 1.) auf dem kürzesten Weg nach Kapstadt (18°25' ö / 33°56' s). Unter welcher Breite und unter welchem Winkel kreuzt es den Nullmeridian?

4. Ein Flugzeug fliegt auf dem Großkreis von Oslo (10,7° ö / 59,9° n) nach Quebeck (71,2° w / 46,8° n). Wo befindet sich der nördlichste Punkt des Flugweges.

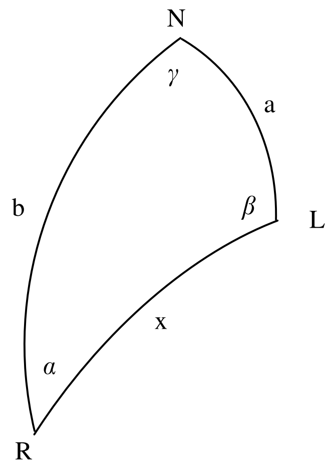
5. Ein Schiff fährt von Lissabon (9,2° w/38,9° n) mit dem Kurswinkel 230° auf dem Großkreis 750sm. Welche geographischen Koordinaten hat der Endpunkt?
   Unter welchem Kurswinkel kommt das Schiff dort an?

6. ***Fremdpeilung*** **(schwierigere aber bedeutungsvolle Anwendung)**
   Die SOS-Rufe eines Schiffes werden in New York (71,1° w / 40,7° n) aus der Richtung 61° 20' und in Lissabon (9,2° w / 38,7° n) aus der Richtung 311°49' aufgefangen.
   An welchem Ort befindet sich das Schiff?

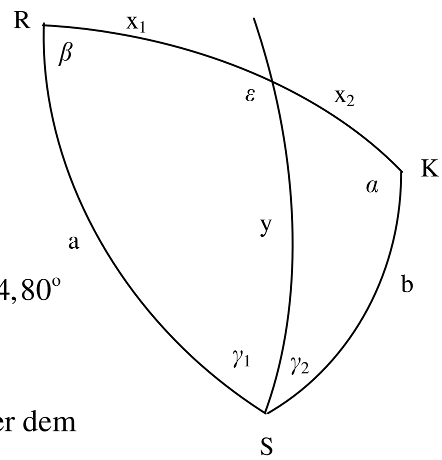
Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * Allgemeines sphärisches Dreieck * Lösungen

1. $a = 36^\circ$; $b = 1{,}5\,a = 54^\circ$; $\beta = 30{,}0^\circ$; $\sin\alpha = \dfrac{\sin a \cdot \sin\beta}{\sin b} = 0{,}36327... \Rightarrow \alpha \approx 21{,}3^\circ$

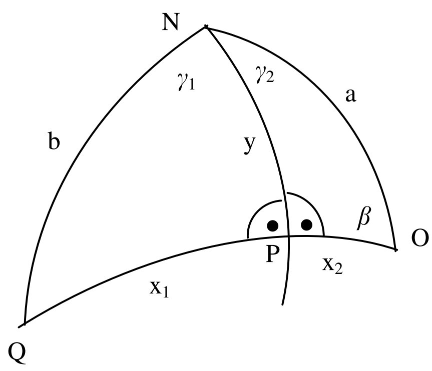
2. $a = 90^\circ - 38^\circ 52' \approx 51{,}1^\circ$; $b = 90^0 + 22{,}9^\circ = 112{,}9^\circ$;
   $\gamma = 43{,}2^\circ - 9^\circ 11' \approx 34{,}0^\circ$;
   $\cos x = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma = 0{,}3499... \Rightarrow$
   $x = 69{,}51...^\circ \mathrel{\hat{=}} 7728\,\text{km} \mathrel{\hat{=}} 4171\,\text{sm}$
   Reisezeit: $4171\,\text{sm} : 18\,\text{kn} \approx 232\,\text{h} = 9\,\text{d}\,16\,\text{h}$
   $\sin\beta = \dfrac{\sin b \cdot \sin\gamma}{\sin x} = 0{,}5499... \Rightarrow \beta \approx 180^\circ - 33{,}4^\circ = 146{,}6^\circ$
   $\sin\alpha = \dfrac{\sin ab \cdot \sin\gamma}{\sin x} = 0{,}4646... \Rightarrow \alpha \approx 27{,}7^\circ$
   Kurswinkel bei der Abfahrt: $360^\circ - \beta = 213{,}4^\circ$
   Kurswinkel bei der Ankunft: $180^\circ + \alpha = 207{,}7^\circ$



3. $a = 67{,}1^\circ$; $b = 56{,}1^\circ$; $x_1 + x_2 = x$
   $\gamma_1 = 43{,}2^\circ$; $\gamma_2 = 18{,}4^\circ$; $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$
   $\cos x = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma = 0{,}5806... \Rightarrow$
   $x = 54{,}50^\circ$;
   $\sin\beta = \dfrac{\sin b \cdot \sin\gamma}{\sin x} = 0{,}8968... \Rightarrow \beta = 63{,}74^\circ$
   $\cos\varepsilon = -\cos\beta \cdot \cos\gamma_1 + \sin\beta \cdot \sin\gamma_1 \cdot \cos a = -0{,}0836.. \Rightarrow \varepsilon = 94{,}80^\circ$
   $\sin y = \dfrac{\sin a \cdot \sin\beta}{\sin\varepsilon} = 0{,}829... \Rightarrow y = 56{,}0^\circ$
   Das Schiff kreuzt den Nullmeridian bei $34{,}0^\circ$ südl. Breite unter dem Kurswinkel von $94{,}8^\circ$.



4. $a = 30{,}1^\circ$; $b = 43{,}2^\circ$; $x_1 + x_2 = x$;
   $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$; $\gamma = 81{,}9^\circ$;
   $\cos x = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma = 0{,}6790... \Rightarrow$
   $x = 47{,}23^\circ \mathrel{\hat{=}} 5251\,\text{km}$
   $\cos b = \cos a \cdot \cos x + \sin a \cdot \sin x \cdot \cos\beta \Rightarrow$
   $\cos\beta = 0{,}3843.... \Rightarrow \beta = 67{,}40^\circ$
   Mit Regeln von Neper folgt nun :
   $\cos(90^\circ - y) = \sin\beta \cdot \sin a \Rightarrow y = 27{,}58^\circ$
   $\cos a = \dfrac{1}{\tan\beta \cdot \tan\gamma_2} \Rightarrow \tan\gamma_2 = 0{,}481... \Rightarrow \gamma_2 = 25{,}7^\circ$
   Der nördlichste Punkt P auf der Wegstrecke hat damit die geographischen Koordinaten P (62,4° nördl. / 15,0° westl.).



5. $750\,\text{sm} \triangleq\ a = (750^\circ : 60) = 12{,}5^\circ$; $b = 51{,}1^\circ$;

$\gamma = 360^\circ - 230^\circ = 130^\circ$;

$\cos x = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma = 0{,}5048... \Rightarrow$

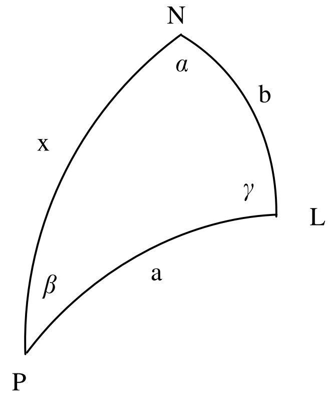
$x = 59{,}68^\circ$

$$\sin\alpha = \frac{\sin a \cdot \sin\gamma}{\sin x} = 0{,}1920... \Rightarrow \alpha = 11{,}07^\circ$$

Die geographischen Koordinaten vom Zielpunkt P lauten P (20,3° westl. / 30,3° nördl.).

$$\sin\beta = \frac{\sin b \cdot \sin\alpha}{\sin a} = 0{,}69039... \Rightarrow \beta = 43{,}7^\circ$$

Das Schiff kommt unter einem Kurswinkel von $180^\circ + ß = 223{,}7^\circ$ am Zielort an.



6. $a = 51{,}3^\circ$; $b = 49{,}3^\circ$; $\gamma = 61{,}9^\circ = \gamma_1 + \gamma_2$

$\alpha_1 = 61{,}3^\circ$; $\alpha = \alpha_1 + \varepsilon_1$; $\beta_2 = 48{,}2^\circ$; $\beta = \beta_2 + \varepsilon_2$

$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma = 0{,}6864... \Rightarrow$

$c = 46{,}65^\circ$

$$\sin\alpha = \frac{\sin a \cdot \sin\gamma}{\sin c} = 0{,}9467... \Rightarrow \alpha = 71{,}21^\circ$$

$$\sin\beta = \frac{\sin b \cdot \sin\gamma}{\sin c} = 0{,}9196... \Rightarrow \beta = 66{,}88^\circ$$

$\varepsilon_1 = \alpha - \alpha_1 = 9{,}91^\circ$; $\varepsilon_2 = \beta - \beta_2 = 18{,}68^\circ$

$\cos\delta = -\cos\varepsilon_1 \cdot \cos\varepsilon_2 + \sin\varepsilon_1 \cdot \sin\varepsilon_2 \cdot \cos c = -0{,}8953.. \Rightarrow \delta = 153{,}55^\circ$

$$\sin y_1 = \frac{\sin c \cdot \sin\varepsilon_2}{\sin\delta} = 0{,}5228... \Rightarrow y_1 = 31{,}53^\circ$$

$\cos x = \cos y_1 \cdot \cos b + \sin y_1 \cdot \sin b \cdot \cos\alpha_1 = 0{,}7462... \Rightarrow x = 41{,}74^\circ$

$$\sin\gamma_1 = \frac{\sin\alpha_1 \cdot \sin y_1}{\sin x} = 0{,}6889... \Rightarrow \gamma_1 = 43{,}55^\circ$$

$71{,}1^\circ - 43{,}6^\circ = 27{,}5^\circ$ westl. ; $90^\circ - x = 48{,}3^\circ$ nördl.

Das Schiff befindet sich am Ort S (27,5° westl. / 48,3° nördl.).