Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * Die Steigung der Tangente an einem Graphen

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5\,x^2 - x - 1{,}5$.
   a) Bestimmen Sie für die Punkte P(-1/?), Q(4/?) und R(1/?) des Graphen die Steigung der zugehörigen Tangente. Was kann man aus dem Ergebnis für den Punkt R folgern?
   b) Wie lautet die Gleichung der Tangente am Graphen im Punkt Q ?
   c) In welchen Punkten und unter welchen Winkeln schneiden sich der Graph von f und die Gerade mit der Funktionsgleichung $g(x) = 0{,}5\,x + 0{,}5$?

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x$.
   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f und $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.
   Skizzieren Sie (ohne weitere Berechnungen) qualitativ den Verlauf des Graphen von f .
   b) Berechnen Sie in den Punkten (-1/?) und (1/?) des Graphen von f die Steigung der Tangente. Warum können Sie nun den Graphen von f wesentlich genauer skizzieren?

3. Die beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f(x) = 0{,}25\,x^2$ und $g(x) = 5 - x^2$ schneiden sich in zwei Punkten.
   Berechnen Sie die Schnittpunkte und die zugehörigen Schnittwinkel der Graphen!

4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a\,x^2 + b$ (mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$).
   a) Zeigen Sie, dass die Tangente im Punkt $P(x_o / f(x_o))$ des Graphen von f die Steigung $m = 2a\,x_o$ besitzt.
   (Man sagt dann auch, dass der Graph von f im Punkt P die Steigung $m = 2a\,x_o$ hat.)
   b) Geben Sie nun die Steigung des Graphen von f in den Punkten S(5/?) und T(-3/?) an.
   c) An welchen Stellen hat der Graph von f die Steigung 2 ?
   Welchen Wert muss der Parameter a haben, damit der Graph von f im Punkt (-2 / ?) die Steigung $m = 1$ hat?

Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * Die Steigung der Tangente an einem Graphen * Lösungen

1. a) $m_P = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{0{,}5x^2 - x - 1{,}5 - 0}{x+1} =$

$\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{0{,}5(x+1)\cdot(x-3)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} 0{,}5\cdot(x-3) = -2$ mit P(-1/0)

$m_Q = \lim\limits_{x\to4} \dfrac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim\limits_{x\to4} \dfrac{0{,}5x^2 - x - 1{,}5 - 2{,}5}{x-4} = \lim\limits_{x\to4} \dfrac{0{,}5(x-4)\cdot(x+2)}{x-4} =$

$\lim\limits_{x\to4} 0{,}5\cdot(x+2) = 3$ mit Q(4/2,5)

$m_R = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{0{,}5x^2 - x - 1{,}5 - (-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{0{,}5(x-1)\cdot(x-1)}{x-1} =$

$\lim\limits_{x\to1} 0{,}5\cdot(x-1) = 0$ also waagrechte Tangente im Punkt R(1/-2)

R ist also der Scheitel der Parabel.

b) $y = mx + t$ mit $m = m_Q = 3$ also $y = 3x + t$; setze $Q(4/2{,}5)$ ein:

$2{,}5 = 3\cdot4 + t \Rightarrow t = -9{,}5$ also lautet die Tangentengleichung $y = 3x - 9{,}5$.

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0{,}5x^2 - 1{,}5x - 2 = 0 \Leftrightarrow 0{,}5\cdot(x-4)\cdot(x+1) = 0$ also liegen die Schnittpunkte bei $x_1 = 4$ und $x_2 = -1$; Schnittpunkte Q(4/2,5) und P(-1/0)

Schnittwinkel bei Q: $\tan(\varphi_Q) = \left|\dfrac{m_Q - m_g}{1 + m_Q\cdot m_g}\right| = \left|\dfrac{3-0{,}5}{1+1{,}5}\right| = 1 \Rightarrow \varphi_Q = 45^\circ$

Schnittwinkel bei P: $\varphi_P = 90^\circ$, denn $m_P\cdot m_g = -2\cdot0{,}5 = -1$

2. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0;\ x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (x^3 - 3x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3\cdot(1 - \dfrac{3}{x^2}) = "\pm\infty\cdot(1-0)" = \pm\infty$

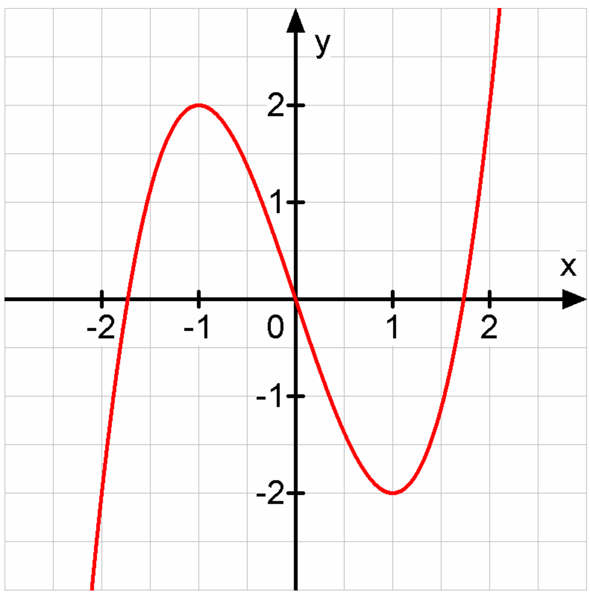
Erste Skizze: Zwischen $x_3 = -\sqrt{3}$ und $x_1 = 0$ liegt ein Hochpunkt,

zwischen $x_1 = 0$ und $x_2 = \sqrt{3}$ liegt ein Tiefpunkt.

b) $m(-1) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(x+1)\cdot(x^2 - x - 2)}{x+1} =$

$\lim\limits_{x\to-1} (x^2 - x - 2) = -1 + 1 - 2 = 0$

An der Stelle $x_1 = -1$ hat der Graph also eine waagrechte Tangente; d.h. (-1/2) ist der Hochpunkt! Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung $[f(-x) = -f(x)]$ ist (1/-2) der Tiefpunkt. Mit der Kenntnis des Hoch- und Tiefpunktes kann man den Graphen wesentlich genauer zeichnen.



3. Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,25x^2 = 5 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = \pm 2$ und $y_{1/2} = 1$

$S_1(-2/1)$ und $S_2(2/1)$

Steigungen von G_f und G_g im Punkt $S_2(2/1)$:

$$m_f = \lim_{x\to 2}\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{0,25x^2 - 1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{0,25(x+2)\cdot(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} 0,25(x+2) = 1$$

$$m_g = \lim_{x\to 2}\frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}\frac{5 - x^2 - 1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)\cdot(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(-x-2) = -4$$

$$\tan(\varphi) = \left|\frac{m_f - m_g}{1 + m_f \cdot m_g}\right| = \left|\frac{1-(-4)}{1-4}\right| = \frac{5}{3} \Rightarrow \varphi \approx 59,0^o \text{ ; wegen Symmetrie } \varphi_{\text{bei } S_1} = \varphi \approx 59,0^o$$

4. a) $$m(x_o) = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{a x^2 + b - (a x_o^2 + b)}{x - x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{a x^2 - a x_o^2}{x - x_o} =$$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{a(x-x_o)\cdot(x+x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} a\cdot(x+x_o) = a\cdot(x_o + x_o) = 2a x_o$$

b) $S(5/25a+b)$ und $m_S = 2\cdot a\cdot 5 = 10a$; $T(-3/9a+b)$ und $m_T = 2\cdot a\cdot(-3) = -6a$

c) $m(x_1) = 2 \Leftrightarrow 2a x_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{a}$

$Q(-2/4a+b)$; $m_Q = 1 \Leftrightarrow 2a x_Q = 1 \Leftrightarrow 2a\cdot(-2) = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$