Mathematik * Jahrgangsstufe 11

Wichtige Lerninhalte zum Themenbereich quadratische Funktionen

Quadratische Gleichungen:

Normalform der quadratischen Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0$

Zugehörige Diskriminante D: $D = b^2 - 4ac$

Keine Lösung für $D < 0$, für $D > 0$ zwei Lösungen $x_{1/2} = \frac{1}{2 \cdot a}\left(-b \pm \sqrt{D}\right)$

Genau eine Lösung für $D = 0$, nämlich $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2 \cdot a}$

Spezialfälle:

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{falls } -\frac{c}{a} \geq 0$$

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow ax \cdot (x + \frac{b}{a}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Satz von Vieta:

Hat $x^2 + bx + c = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, dann kann man schreiben

$x^2 + bx + c = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ d.h. $x_1 \cdot x_2 = c$ und $x_1 + x_2 = -b$

allgemein:

Hat $ax^2 + bx + c = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, dann gilt

$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Quadratische Funktionen:

Normalform: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Scheitelform: $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ mit dem Scheitel bei $S(x_S / y_S)$

Umrechnen von Scheitelform in Normalform durch ***Ausmultiplizieren***.
Umrechnen von Normalform in Scheitelform durch ***quadratische Ergänzung***.

Quadratische Ergänzung:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) + c = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 + c$$

Nullstellen einer quadratischen Funktion (Schnittstellen der Parabel mit x-Achse):
Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ d.h. $ax^2 + bx + c = 0$

Schnittstellen von Parabel (Funktionsterm p(x)) und Gerade (Funktionsterm g(x))

$p(x) = g(x) \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = mx + t \Leftrightarrow ax^2 + (b - m)x + c - t = 0$ mit zugehöriger Diskriminante $D = (b - m)^2 - 4 \cdot a \cdot (c - t)$

Für $D < 0$ schneiden sich Parabel und Tangente nicht.
Für $D > 0$ gibt es zwei Schnittpunkte.
Für $D = 0$ ist die Gerade eine Tangente an die Parabel, d.h. Parabel und Gerade berühren sich.

Mathematik * Jahrgangsstufe 11 * Aufgaben zu quadratischen Funktionen
(Wiederholung 9. Klasse)

1. Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels und alle Nullstellen. Zeichnen Sie dann die Parabel in ein Koordinatensystem!
   In welchem Intervall ist f streng monoton fallend. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der zugehörigen Umkehrfunktion und geben Sie auch ihren Definitionsbereich an.

   a) $f(x) = 0{,}5x^2 + 4x + 6$　　　b) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

   c) $f(x) = 1{,}5x^2 - 4{,}5x$　　　d) $f(x) = 0{,}25x \cdot (2 - x)$

2. Für welche Werte des Parameters k hat die quadratische Gleichung zwei Lösungen?

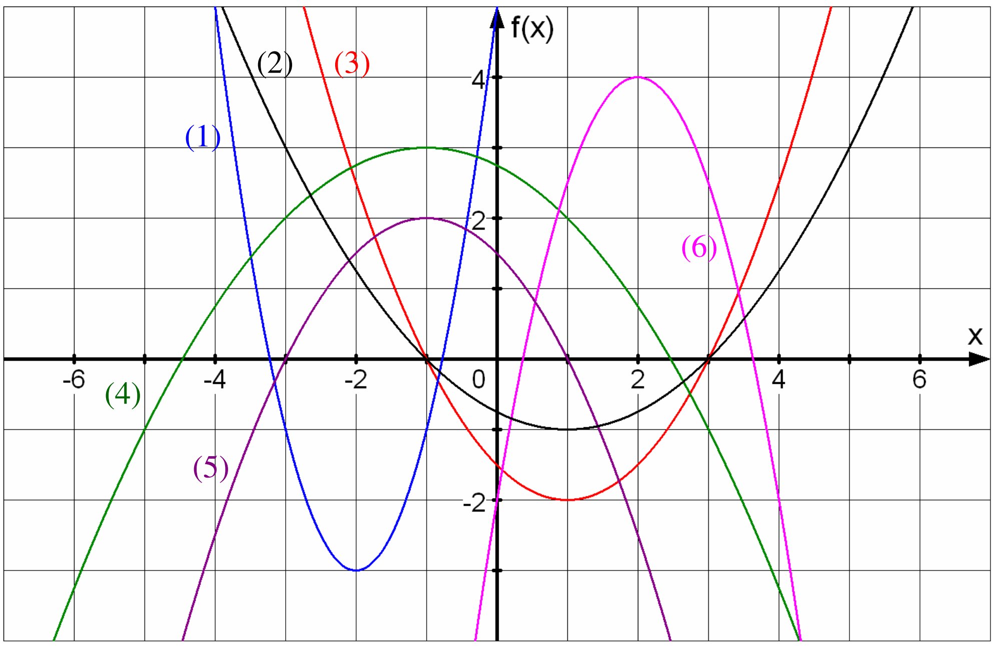
   a) $2x^2 - kx - 0{,}5k = 0$　　　b) $2x^2 - (k+4)x + 2 = 0$

3. Ergänzen Sie die quadratische Gleichung so, dass sie genau eine Lösung hat.

   a) $3x^2 + 4x - \square = 0$　　　b) $5x^2 + 8x + \square = 0$

   c) $\square \cdot x^2 + 6x - 3 = 0$　　　d) $3x^2 + \square x + 1 = 0$

4. Geben Sie zu jedem Graphen die zugehörige Scheitelform an!



(1) y =　　　(2) y =

(3) y =　　　(4) y =

(5) y =　　　(6) y =

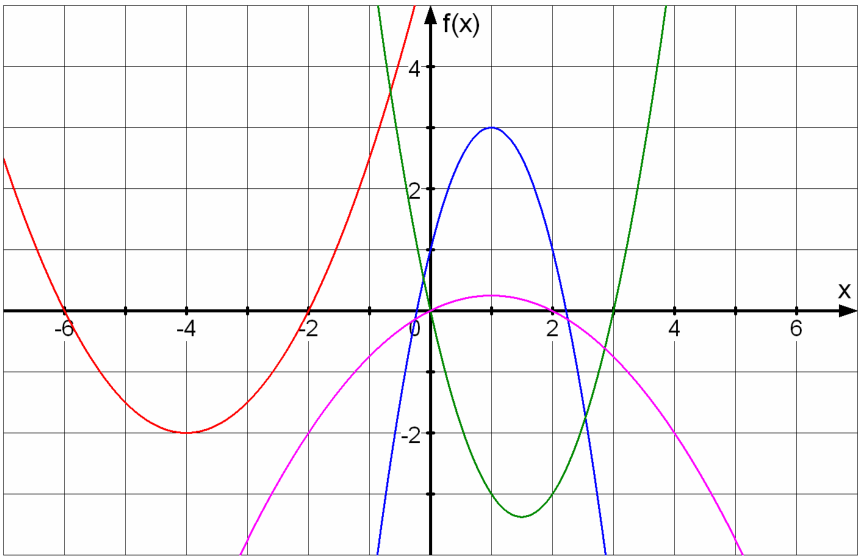
Mathematik * Klasse 11a * Aufgaben zu quadratischen Funktionen * Lösungen

1. a) $f(x) = 0{,}5x^2 + 4x + 6 = 0{,}5\cdot(x+4)^2 - 2$; $S(-4/-2)$; NSt.: $x_1 = -6$; $x_2 = -2$;
f ist im Intervall $]-\infty\,;-2\,]$ streng monoton fallend und für die zugehörige
Umkehrfunktion gilt: $f^{-1}(x) = -4 - \sqrt{2x+4}$ mit $D_{f^{-1}} = [-2\,;\infty[$

b) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1 = -2\cdot(x-1)^2 + 3$; $S(1/3)$; NSt.: $x_{1/2} = 1 \pm 0{,}5\cdot\sqrt{6}$
f ist im Intervall $]\,1\,;\infty\,]$ streng monoton fallend und für die zugehörige
Umkehrfunktion gilt: $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1{,}5 - 0{,}5x}$ mit $D_{f^{-1}} =]-\infty\,;3\,]$

c) $f(x) = 1{,}5x^2 - 4{,}5x = 1{,}5\cdot(x-1{,}5)^2 - 3{,}375$; $S(1{,}5/-3{,}375)$; NSt.: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$
f ist im Intervall $]-\infty\,;1{,}5\,]$ streng monoton fallend und für die zugehörige
Umkehrfunktion gilt: $f^{-1}(x) = 1{,}5 - \sqrt{\frac{2x}{3} + \frac{9}{4}}$ mit $D_{f^{-1}} =]-3{,}375\,;\infty]$

d) $f(x) = 0{,}25x\cdot(2-x) = -0{,}25\cdot(x-1)^2 + 0{,}25$; $S(1/0{,}25)$; NSt.: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$
f ist im Intervall $[\,1\,;\infty[$ streng monoton fallend und für die zugehörige
Umkehrfunktion gilt: $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1-4x}$ mit $D_{f^{-1}} =]-\infty\,;0{,}25\,]$



2. a) Es gibt zwei Lösungen für $k \in R \setminus [-4;0]$

b) Es gibt zwei Lösungen für $k \in R \setminus [-8;0]$

3. Es muss jeweils $D = 0$ gelten.

a) $D = 16 + 4\cdot3\cdot\square = 16 + 12\cdot\square \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \square = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3}$

b) $D = 64 - 4\cdot5\cdot\square = 64 - 20\cdot\square \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \square = \frac{64}{20} = 3{,}2$

c) $D = 36 + 4\cdot\square\cdot3 = 36 + 12\cdot\square \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \square = -\frac{36}{12} = -3$

d) $D = \square^2 - 4\cdot3\cdot1 = \square^2 - 12 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \square_{1/2} = \pm\sqrt{12} = \pm2\sqrt{3}$

4. (1) $y = 2\cdot(x+2)^2 - 3$ (2) $y = 0{,}25\cdot(x-1)^2 - 1$

(3) $y = 0{,}5\cdot(x-2)^2 - 2$ (4) $y = -0{,}25\cdot(x+1)^2 + 3$

(5) $y = -0{,}5\cdot(x+1)^2 + 2$ (6) $y = -1{,}5\cdot(x+2)^2 + 4$