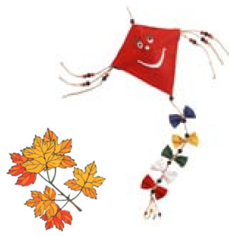
Unendliche Summen * Geometrische Reihen



Unendliche Summen (unendliche Reihen)

Summen mit unendlich vielen Summanden haben oft sehr erstaunliche Werte.
Zum Beispiel:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots.=1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots.=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\ldots.=\frac{1}{4} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots.=\frac{\pi^2}{6}$$

Die Werte müssen durch Grenzwertbildung bestimmt werden:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots.=\lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{mit} \quad S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

Geometrische Reihen

Im Folgenden erfahren Sie, wie man so genannte geometrische Reihen berechnet.
Eine geometrische Reihe hat die Form $S_n = a + a\cdot q + a\cdot q^2 + a\cdot q^3 + \ldots. + a\cdot q^n$

1) Geben Sie drei Beispiele für geometrische Reihen an.

2) Zeigen Sie: $S_n = a\cdot\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ Hinweis: Berechnen Sie $q\cdot S_n - S_n =$

2) Zeigen Sie, dass für $r>1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$

Hinweis: Nutzen Sie $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\cdot\varepsilon + \dfrac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot\varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^n$ für $n\in N$ und $\varepsilon>0$

3) Folgern Sie, dass für $0<q<1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

4) Zeigen Sie $a + a\cdot q + a\cdot q^2 + a\cdot q^3 + \ldots. = \dfrac{a}{1-q}$ für $0<q<1$

5) Berechnen Sie nun die folgenden unendlichen Summen:

a) $\dfrac{1}{3^0}+\dfrac{1}{3^1}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\ldots.=$ b) $\dfrac{1}{4^0}+\dfrac{1}{4^1}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{4^3}+\ldots.=$

c) $\dfrac{1}{n^0}+\dfrac{1}{n^1}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}+\ldots.=$ für $n\in N$

d) $\dfrac{2}{3^1}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{2}{3^3}+\dfrac{2}{3^4}+\ldots.=$

e) $\dfrac{4}{3^1}-\dfrac{3}{4^1}+\dfrac{4}{3^2}-\dfrac{3}{4^2}+\dfrac{4}{3^3}-\dfrac{3}{4^3}+\dfrac{4}{3^4}-\dfrac{3}{4^4}+\ldots.=$