

Lineare Gleichungssysteme ** Jahrgangsstufe 8

Was ist ein lineares Gleichungssystem?

Sind mehrere lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten (Variablen) **gleichzeitig** zu lösen, so spricht man von einem **linearen Gleichungssystem** (LGS).

Das folgende LGS besteht z.B. aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten:

$$\begin{array}{lcl} (1) & 3x + 2y + z = 9 & \\ (2) & 2x - y - z = 0 & \\ (3) & -x + 4y + 2z = 4 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Es empfiehlt sich, gleiche Unbekannte} \\ \text{möglichst untereinander zu schreiben.} \\ \text{(Wegen besserer Übersichtlichkeit!)} \end{array}$$

Wie löst man ein LGS?

Löse **eine** der Gleichungen nach **einer beliebigen** Unbekannten auf und setze diesen Ausdruck in die **restlichen** Gleichungen ein. Triff dabei eine geschickte Wahl! So entsteht ein neues LGS, das eine Unbekannte und auch eine Gleichung weniger enthält als das ursprüngliche.

Wiederhole dies, bis nur noch eine Gleichung übrig ist.

Sollten in dieser letzten Gleichung noch mehr Unbekannte sein (d.h. das ursprüngliche LGS enthielt mehr Unbekannte als Gleichungen!), so gibt es i. A. unendlich viele Lösungen und man kann bis auf eine Unbekannte alle anderen frei wählen. Enthält die letzte Gleichung nur noch eine Unbekannte, so ist die Aufgabe offensichtlich eindeutig lösbar.

Die gefundenen Werte der Unbekannten setzt man nun in die Gleichungen ein und rechnet "rückwärts" die "hinausgeworfenen" Unbekannten der Reihe nach aus.

$$\begin{array}{lcl} (1) & 3x + 2y + z = 9 & \\ (2) & 2x - y - z = 0 & \text{Löse (2) nach } z \text{ auf!} \\ (3) & -x + 4y + 2z = 4 & \end{array}$$

$$(2) \quad z = 2x - y \quad \text{Setze } z = 2x - y \text{ in (1) und (2) ein!}$$

$$\begin{array}{lcl} (1) & 3x + 2y + 2x - y = 9 & \Leftrightarrow 5x + y = 9 \quad \text{Löse (1) nach } y \text{ auf!} \\ (3) & -x + 4y + 2 \cdot (2x - y) = 4 & \Leftrightarrow 3x + 2y = 4 \end{array}$$

$$(1) \quad y = 9 - 5x \quad \text{Setze } y = 9 - 5x \text{ in (3) ein!}$$

$$(3) \quad 3x + 2 \cdot (9 - 5x) = 4 \quad \Leftrightarrow -7x + 18 = 4 \quad \Leftrightarrow 7x = 14 \quad \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Setze nun } x = 2 \text{ ein in (1) } y = 9 - 5x \quad \text{d.h. } y = 9 - 5 \cdot 2 = -1 \quad \Leftrightarrow y = -1$$

$$\text{Setze nun } x = 2 \text{ und } y = -1 \text{ ein in (2) } z = 2x - y = 2 \cdot 2 - (-1) = 5 \quad \Leftrightarrow z = 5$$

Die eindeutige Lösung lautet hier also **$x = 2$, $y = -1$ und $z = 5$** .

Man schreibt oft auch nur kurz **$(x / y / z) = (2 / -1 / 5)$** .

Aufgaben:

Gib zuerst an, welche Unbekannten du verwendest, erstelle die Gleichungen und löse dann das lineare Gleichungssystem nach dem angegebenen Schema!

1. Ein Dreieck hat den Umfang 26cm. Die längste Seite ist um 2cm kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten. Die längste Seite ist außerdem doppelt so lang wie eine der beiden anderen!
2. Die Summe dreier Zahlen ist 18. Eine der drei Zahlen ist halb so groß wie die Summe der beiden anderen und zudem um 2 größer als eine der anderen.
3. In einem Viereck mit dem Umfang 38cm sind die zwei kürzesten Seiten gleich lang. Die größte Seite ist um 3cm länger als die Summe der beiden kürzesten. Die kürzeste Seite ist um 6cm kürzer als die dreifache Differenz der beiden längeren.