Übungsaufgaben zur Mathematik der 9. Jahrgangsstufe im G9

Algebra

1. Gib an, für welche Werte der Variablen der Term definiert ist und vereinfache ihn dann so weit wie möglich.

   a) $\sqrt{\dfrac{8x^4y}{z^2}}$ b) $\sqrt{6x\cdot\sqrt{9x^2y^6}}$ c) $\sqrt{\sqrt{81\cdot a^8b^4}}$

2. Mache den Nenner rational und radiziere so weit wie möglich.

   a) $\sqrt{\dfrac{5}{3y}}$ b) $\dfrac{2\cdot\sqrt{18x^2}}{\sqrt{1+x}}$ c) $\dfrac{2x}{3+\sqrt{2x}}$

3. Bestimme die Lösungsmenge

   a) $3x^3 - 6{,}75x = 0$ b) $2x^4 - 3x^2 = 0$ c) $2x^4 + 3x^2 = 0$

4. Bestimme alle Lösungen der Gleichung

   a) $5x - 3 = 2x^2$ b) $x + 2 = \dfrac{3}{x}$ c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{1-x} = 0$

5. Die quadratische Gleichung $x^2 - 2x + c = 0$ hat die Lösung $x_1 = 5$.
   Bestimme den Wert von c und die zweite Lösung der Gleichung.

6. Die quadratische Gleichung $x^2 - 2x + c = 0$ hat die Lösung $x_1 = 1+\sqrt{2}$.
   Bestimme den Wert von c und die zweite Lösung der Gleichung.

7. Für welche Werte von k hat die quadratische Gleichung $x^2 - kx + 5 = 0$ keine Lösung?

8. Für welche Werte von k hat die quadratische Gleichung $x^2 - k(x-1) + 1 = 0$ genau eine Lösung?

9. Bestimme die Definitionsmenge und dann die Lösungsmenge.

   a) $\sqrt{x+7} = 4$ b) $\sqrt{x^2+7} = 4$ c) $\sqrt{x^2-6} = \sqrt{-x}$

10. Bestimme durch quadratische Ergänzung den Scheitel der Parabel.

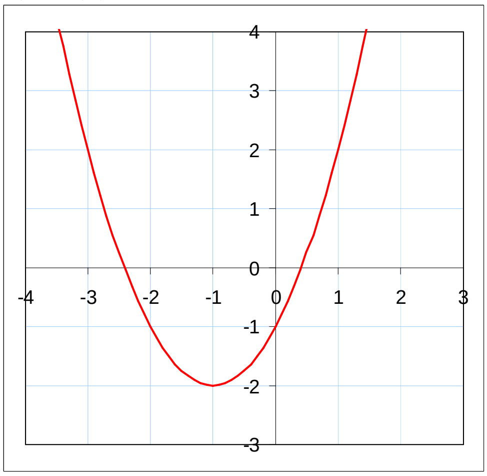
    a) $f(x) = x^2 + 12x + 40$ b) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 0{,}5$
    c) $f(x) = -3x^2 + 9x + 0{,}25$

11. Die Buskosten für einen Klassenausflug betragen 360 €.
    Am Ausflugstag fehlen vier Schüler; deshalb müssen die Fahrtkosten pro Schüler um den Betrag von 3 € erhöht werden.
    Wie viele Schüler wollten anfänglich am Klassenausflug teilnehmen?

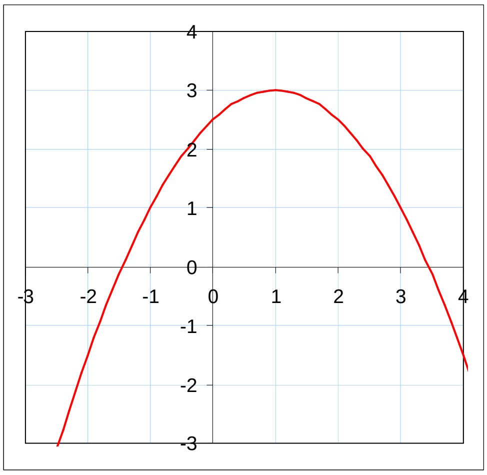
12. Bei einem Quadrat mit Kantenlänge x wird eine Seite um 2cm verkürzt, die andere Seite um 3cm verlängert. Es entsteht ein Rechteck, dessen Flächeninhalt um 2cm^2 größer ist als der des ursprünglichen Quadrats.
Berechne die Kantenlänge x des Quadrats!

13. Die beiden Bilder zeigen zwei Parabeln, die zu den Funktionen f bzw. g gehören.
Gib jeweils den Funktionsterm $f(x)$ bzw. $g(x)$ an.

a) $f(x) = ?$



b) $g(x) = ?$



14. Das Bild zeigt den Graphen einer Wurzelfunktion f.
Kreuze alle richtigen Aussagen an!

a) ☐ $D_f = [-3\,;\,\infty[$

b) ☐ $W_f = [-3\,;\,\infty[$

c) ☐ $f(x) = \sqrt{x-2} - 3$

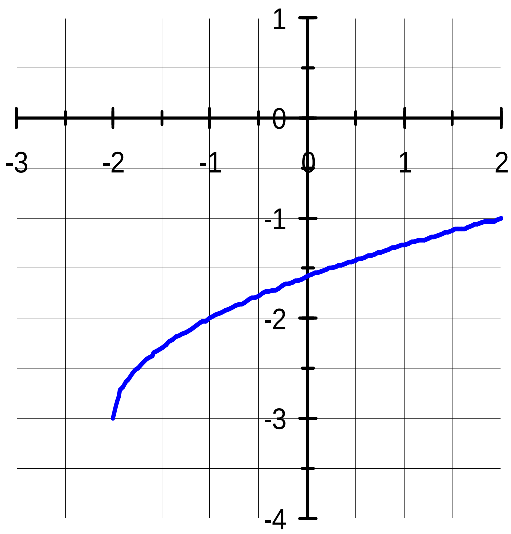
d) ☐ $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

e) ☐ $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$

f) ☐ $f(x) = -\sqrt{x+2} - 3$

g) ☐ Die Umkehrfunktion von f hat den Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = [-3\,;\,\infty[$

h) ☐ Die Umkehrfunktion von f hat den Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = [-2\,;\,\infty[$



15. Die Funktion f mit $f(x) = 2\cdot(x-1)^2 - 3$ mit $D_f =]-\infty;1]$ ist umkehrbar.
Bestimme den Funktionsterm $f^{-1}(x)$ der zugehörigen Umkehrfunktion und gib auch den Definitionsbereich von f^{-1} an.

Lösungen zu „Übungsaufgaben zur Mathematik der 9. Jahrgangsstufe im G9“
Algebra

1. a) $\sqrt{\frac{8x^4y}{z^2}} = \frac{2x^2\sqrt{2y}}{|z|}$ mit $x \in R$, $y \in R_o^+$, $z \in R \setminus \{0\}$

   b) $\sqrt{6x \cdot \sqrt{9x^2y^6}} = \sqrt{6x \cdot 3x|y^3|} = 3x|y| \cdot \sqrt{2|y|}$ mit $x \in R_o^+$, $y \in R$

   c) $\sqrt{\sqrt{81 \cdot a^8b^4}} = \sqrt{9a^4b^2} = 3a^2|b|$ mit $a \in R$, $b \in R$

2. a) $\sqrt{\frac{5}{3y}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 3y}{3y \cdot 3y}} = \frac{\sqrt{15y}}{3y}$ $(y \in R^+)$

   b) $\frac{2 \cdot \sqrt{18x^2}}{\sqrt{1+x}} = \frac{2 \cdot 3|x| \cdot \sqrt{2 \cdot (1+x)}}{\sqrt{(1+x)^2}} = \frac{6|x| \cdot \sqrt{2 \cdot (1+x)}}{|1+x|}$ mit $x \in]-1;\infty[$

   c) $\frac{2x}{3+\sqrt{2x}} = \frac{2x \cdot (3-\sqrt{2x})}{(3+\sqrt{2x}) \cdot (3-\sqrt{2x})} = \frac{6x - 2x\sqrt{2x}}{9-2x}$ (mit $x \in R^+$)

3. a) $3x^3 - 6,75x = 0 \Leftrightarrow 3x \cdot (x^2 - 2,25) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot x \cdot (x-1,5) \cdot (x+1,5) = 0 \Leftrightarrow$
   $x_1 = 0$, $x_2 = 1,5$, $x_3 = -1,5$

   b) $2x^4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(x^2 - \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot x^2 \cdot (x - \frac{\sqrt{6}}{2}) \cdot (x + \frac{\sqrt{6}}{2}) = 0 \Leftrightarrow$
   $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

   c) $2x^4 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (2x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (denn $2x^2 + 3 > 0$)

4. a) $5x - 3 = 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{4} \cdot \left(5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}\right) \Leftrightarrow x_1 = 1,5$, $x_2 = 1$

   b) $x + 2 = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3) \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3$, $x_2 = 1$

   c) $\frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)+x^2}{x \cdot (1-x)} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow L = \{\}$ denn $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$

5. $x_1^2 - 2x_1 + c = 0 \Leftrightarrow 25 - 10 + c = 0 \Leftrightarrow c = -15$; also $x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow$
   $(x-5) \cdot (x+3) = 0$, d.h. die zweite Lösung der Gleichung lautet $x_2 = -3$.

6. $x_1^2 - 2x_1 + c = 0 \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})^2 - 2 \cdot (1+\sqrt{2}) + c = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 2 - 2\sqrt{2} + c = 0$
   also $c = -1$. Die Gleichung lautet also $x^2 - 2x - 1 = 0$.
   $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \pm \sqrt{4+4}\right) = 1 \pm \sqrt{2}$, also gilt $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

7. Die Gleichung $x^2 - kx + 5 = 0$ hat keine Lösung, falls gilt $D = (-k)^2 - 4 \cdot 5 < 0 \Leftrightarrow$
   $k^2 < 20 \Leftrightarrow -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$.

8. Die Gleichung $x^2 - k(x-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - k\cdot x + (k+1) = 0$ hat genau eine Lösung, falls gilt $D = (-k)^2 - 4\cdot(k+1) = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4k - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$k_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot\left(4 \pm \sqrt{16+16}\right) = 2 \pm 2\sqrt{2}$

9. a) $\sqrt{x+7} = 4$; $D = [-7;\infty[$ und $x+7=16$ d.h. $x=9$; $L=\{9\}$

b) $\sqrt{x^2+7} = 4$; $D=R$ und $x^2+7 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$ also $L=\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

c) $\sqrt{x^2-6} = \sqrt{-x}$; es muss gelten: $(x \geq \sqrt{6}$ oder $x \leq -\sqrt{6})$ und $x<0$

also $D =]-\infty; -\sqrt{6}]$

$\sqrt{x^2-6} = \sqrt{-x} \Leftrightarrow x^2 - 6 = -x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)\cdot(x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 = -3$ und $(x_2 = 2 \notin D)$ also $L=\{-3\}$

10. a) $f(x) = x^2 + 12x + 40 = (x^2 + 2\cdot 6\cdot x + 6^2) - 36 + 40 = (x+6)^2 + 4$ also $S(-6/4)$

b) $f(x) = 0,5x^2 - 3x + 0,5 = 0,5\cdot(x^2 - 2\cdot 3\cdot x + 3^2) - 0,5\cdot 3^2 + 0,5 = 0,5\cdot(x-3)^2 - 4$

also $S(3/-4)$

c) $f(x) = -3x^2 + 9x + 0,25 = -3\cdot(x^2 - 2\cdot 1,5\cdot x + 1,5^2) + 3\cdot 1,5^2 + 0,25 =$

$-3\cdot(x-1,5)^2 + 7$ also $f(x) = -3\cdot(x-1,5)^2 + 7$, d.h. $S(1,5/7)$

11. Die Anzahl der Schüler sei x, der ursprüngliche Fahrpreis pro Schüler sei y €.

(1) $x\cdot y = 360$ und (2) $(x-4)\cdot(y+3) = 360 \Leftrightarrow x\cdot y + 3\cdot x - 4\cdot y - 12 = 360$

(1) eingesetzt in (2) liefert:

$360 + 3\cdot x - 4\cdot\frac{360}{x} - 12 = 360 \Leftrightarrow 3x - \frac{1440}{x} - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x - 1440 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 4x - 480 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot\left(4 \pm \sqrt{16 + 4\cdot 480}\right) = \frac{1}{2}\cdot(4 \pm 44)$ also $x = 24$ und $y = 15$.

Es wollten also ursprünglich 24 Schüler an der Fahrt teilnehmen.

12. $(x - 2cm)\cdot(x + 3cm) = x^2 + 2cm^2 \Leftrightarrow x^2 + x\cdot 1cm - 6cm^2 = x^2 + 2cm^2 \Leftrightarrow x = 8cm$

13. a) $f(x) = (x+1)^2 - 2$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + 3$

14. Die richtigen Aussagen gehören zu den Teilaufgaben b) d) und g)
Alle anderen Aussagen sind falsch!

15. $f(x) = 2\cdot(x-1)^2 - 3$ mit $D_f =]-\infty;1]$

f^{-1}: $x = 2\cdot(y-1)^2 - 3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{2} = (y-1)^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{x+3}{2}} = y - 1 \Leftrightarrow y = 1 \pm \sqrt{\frac{x+3}{2}}$

wegen $W_{f^{-1}} = D_f =]-\infty;1]$ gilt $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{\frac{x+3}{2}}$ mit $D_{f^{-1}} = [-3;\infty[$