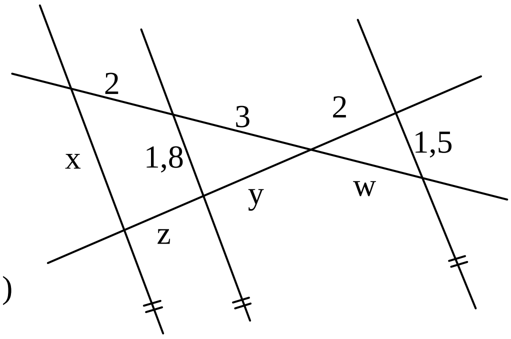
Übungsaufgaben zur Mathematik der 9. Jahrgangsstufe im G9

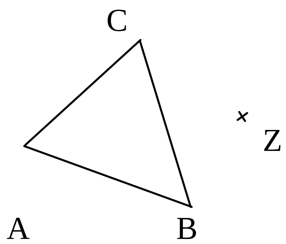
Geometrie

1. Eine Geradenkreuzung wird von drei zueinander parallelen Geraden geschnitten.
   Berechne die Längen x, y, z und w.

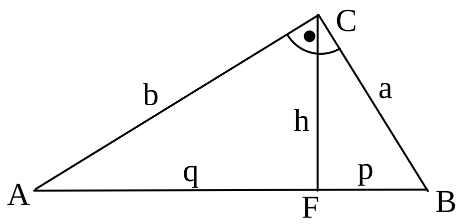
   (Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu!)



2. Das Dreieck ABC wird durch die zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckfaktor m = -2 auf das Dreieck A´B´C´ abgebildet.
   Zeichne das Dreieck A´B´C´ sauber ein.
   Wie verändert sich der Flächeninhalt des Dreiecks?



3. a) Begründe, dass in einem rechtwinkligen Dreieck ABC die drei Dreiecke AFC, CFB und ACB jeweils zueinander ähnlich sind.
   b) Ergänze auf zwei unterschiedliche Arten den Satz zu einer wahren Aussage.
   „Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn ..... ."

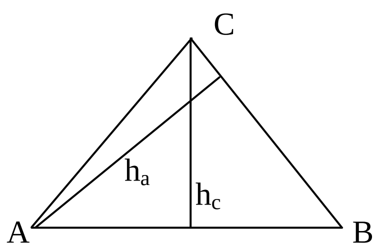


$c = p + q$

4. Gegeben sind die Punkte A(2/1), B(1/10) und C(6/5).
   a) Bestimme die drei Seitenlängen im Dreieck ABC.
   b) Prüfe, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

5. Berechne die Länge der drei Höhen im gleichschenkligen Dreieck ABC , wenn gilt:
   $\overline{BC} = \overline{AC} = 6$ und $\overline{AB} = 8$

   (Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu!)



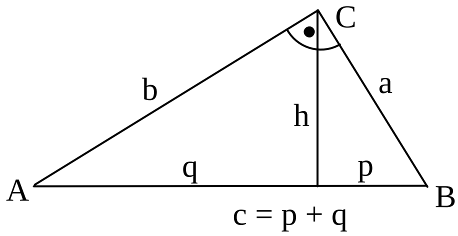
6. a) T teilt die Strecke [AB] (innen) im Verhältnis 3 : 5. Es gilt $\overline{AB} = 12\,\text{cm}$.
Berechne $\overline{AT}$ und $\overline{BT}$.

b) S teilt die Strecke [AB] (außen) im Verhältnis - 3 : 5 . Es gilt $\overline{AB} = 12\,\text{cm}$
Berechne $\overline{AS}$ und $\overline{BS}$.

7. Im abgebildeten rechtwinkligen Dreieck ABC gilt:
q = 6 und b = 10

Berechne die restlichen Längen a, h, p und c.

(Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu!)

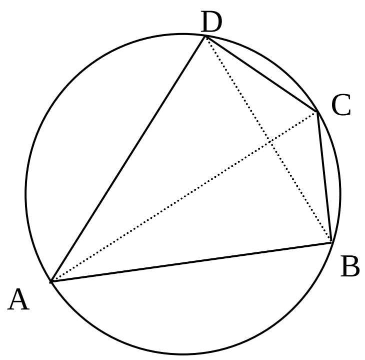


8. Einem Kreis mit Durchmesser $\overline{AC} = d = 13$ ist ein Drachenviereck mit $\overline{CD} = \overline{CB} = 5$ einbeschrieben.

a) Berechne $\overline{AD} = \overline{AB}$.

b) Berechne die zweite Diagonallänge $\overline{BD}$.

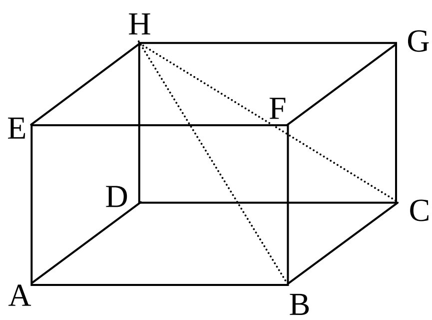
(Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu!)



9. Der abgebildete Quader hat die Kantenlängen
$\overline{AB} = 5$; $\overline{BC} = 4$ und $\overline{AE} = 3$.

a) Berechne die Länge der Rechteck-diagonale $\overline{HC}$ und der Raumdiagonale $\overline{HB}$.

b) Das Dreieck HBC ist rechtwinklig. Zeige dies mit einer geeigneten Rechnung.

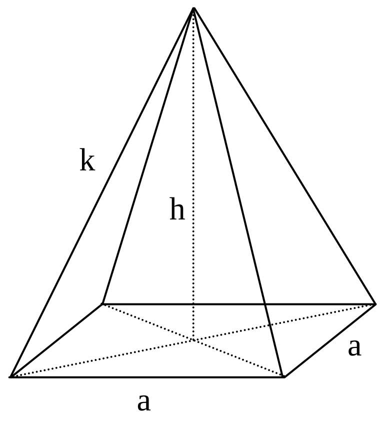


10. Die abgebildete gerade Pyramide hat als Grundfläche ein Quadrat mit der Kantenlänge a.

a) Bestimme die Höhe h in Vielfachen von a so, dass das Volumen den Wert $\frac{1}{2}a^3$ hat.

b) Berechne die Länge der Kante k in Vielfachen von a .

c) Berechne die Oberfläche der Pyramide in Vielfachen von a^2 .



Lösungen zu „Übungsaufgaben zur Mathematik der 9. Jahrgangsstufe im G9“
Geometrie

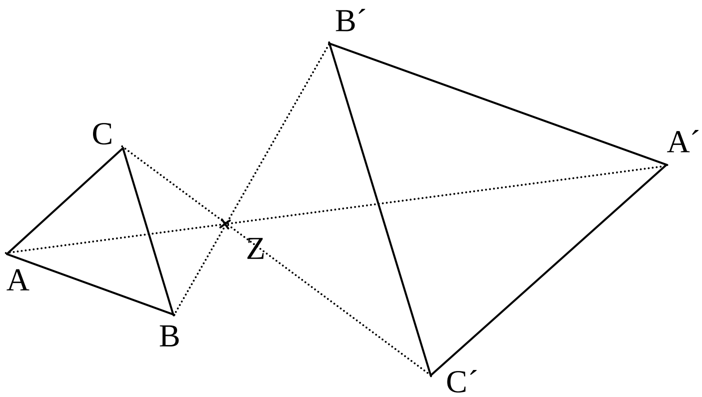
1. $\frac{y}{1,8} = \frac{2}{1,5} \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 18}{15} = 2,4$; $\frac{z}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow z = \frac{2 \cdot 2,4}{3} = 1,6$;

   $\frac{w}{1,5} = \frac{3}{1,8} \Rightarrow w = \frac{3 \cdot 15}{18} = 2,5$; $\frac{x}{2+3} = \frac{1,5}{w} \Rightarrow x = \frac{1,5 \cdot 5}{2,5} = 3$

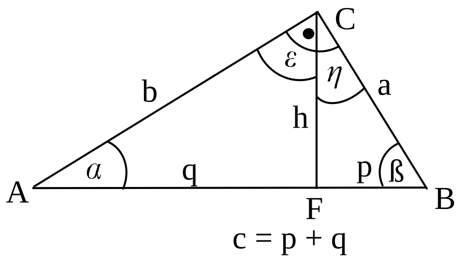
2. Für die Flächeninhalte gilt:

   $F_{neu} = m^2 \cdot F_{alt} = 4 \cdot F_{alt}$

   Der Flächeninhalt vervierfacht sich also.



3a) Die Dreiecke ABC, CBF und ACF sind jeweils rechtwinklig.
Damit gilt $\alpha = \eta$ und $\beta = \varepsilon$.
Die drei Dreiecke haben also Winkel gleicher Größe und sind daher ähnlich zueinander.



b) Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.
Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältnis anliegender Seiten übereinstimmen.

4. a) $\overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-10)^2} = \sqrt{1 + 81} = \sqrt{82}$;

   $\overline{AC} = \sqrt{(2-6)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4 \cdot \sqrt{2}$;

   $\overline{BC} = \sqrt{(1-6)^2 + (10-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5 \cdot \sqrt{2}$;

   b) Es gilt $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \sqrt{32}^2 + \sqrt{50}^2 = 32 + 50 = 82 = \sqrt{82}^2 = \overline{AC}^2$

   Damit ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei B.

5. $h_c{}^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AB}\right)^2 = \overline{AC}^2 \Rightarrow h_c = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2 \cdot \sqrt{5}$

   $\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_c = F_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{\overline{AB} \cdot h_c}{\overline{BC}} = \frac{8 \cdot 2 \cdot \sqrt{5}}{6} = \frac{8 \cdot \sqrt{5}}{3}$

6. a) $\overline{AT} : \overline{TB} = 3 : 5$ und $\overline{AT} + \overline{TB} = \overline{AB} = 12cm \Rightarrow \overline{AT} = \frac{3}{8} \cdot \overline{AB} = \frac{3}{8} \cdot 12cm = 4,5cm$

   $\overline{TB} = 12cm - \overline{AT} = 7,5cm$

   b) $\overline{AS} : \overline{SB} = 3 : 5$ und $\overline{SA} + \overline{AB} = \overline{SB} \Rightarrow \overline{AS} = \frac{3}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{3}{2} \cdot 12cm = 18cm$

   $\overline{SB} = \overline{SA} + 12cm = 30cm$

7. $b^2 = h^2 + q^2 \;\Rightarrow\; h = \sqrt{b^2 - q^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

$h^2 = p \cdot q \;\Rightarrow\; p = \dfrac{h^2}{q} = \dfrac{64}{6} = \dfrac{32}{3}$ und $c = p + q = \dfrac{32}{3} + 6 = \dfrac{50}{3}$

$c^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow\; a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{\dfrac{50^2}{9} - 10^2} = \sqrt{\dfrac{1600}{9}} = \dfrac{40}{3}$

8. a) Die Dreiecke ACD und ACB sind rechtwinklig. Also gilt:

$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 \;\Rightarrow\; \overline{AD} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$

b) $\dfrac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \dfrac{\overline{DB}}{2} = F_{\Delta ACD} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DC} \;\Rightarrow\; \overline{DB} = \dfrac{2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DC}}{\overline{AC}} = \dfrac{2 \cdot 12 \cdot 5}{13} = \dfrac{120}{13}$

9. a) $\overline{HG}^2 + \overline{GC}^2 = \overline{HC}^2 \;\Rightarrow\; \overline{HC} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

$\overline{HB}^2 = a^2 + b^2 + c^2$ mit $a = 5$, $b = 4$ und $c = 3 \;\Rightarrow\; \overline{HB} = \sqrt{25+16+9} = \sqrt{50}$

b) $\overline{HC}^2 + \overline{BC}^2 = 34 + 16 = 50 = \overline{HB}^2 \;\Rightarrow\; \Delta HBC$ hat einen rechten Winkel bei C.

10. a) $V_{\text{Pyramide}} = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ und $V_{\text{Pyramide}} = \dfrac{1}{2} \cdot a^3 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot a^3 \;\Rightarrow\; h = \dfrac{3}{2} a$

b) Für die Diagonale d im Quadrat der Grundfläche gilt: $d = \sqrt{2} \cdot a$

$\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 + h^2 = k^2 \;\Rightarrow\; k = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} a\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2} a\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2} a^2 + \dfrac{9}{4} a^2} = \sqrt{\dfrac{11}{4} a^2} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}\, a$

c) Für die Höhe h_Δ in den gleichschenkligen Dreiecken des Mantels der Pyramide gilt:

$(h_\Delta)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = k^2 \;\Rightarrow\; h_\Delta = \sqrt{k^2 - \dfrac{1}{4} a^2} = \sqrt{\dfrac{11}{4} a^2 - \dfrac{1}{4} a^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}\, a$

$S = a^2 + 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot h_\Delta = a^2 + 2 \cdot a \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{2}\, a = a^2 + \sqrt{10}\, a^2 = (1 + \sqrt{10})\, a^2$