# Einführung in die Informatik * Jahrgangsstufe 9

**Informatik:**
Wissenschaft von der systematischen Verarbeitung von Informationen,
besonders der automatischen Verarbeitung mit Hilfe von Digitalrechnern (Computern).

Da Maschinen nur nach eindeutigen Anweisungen arbeiten können, muss man zur Lösung eines vorgegebenen **Problems** zuerst einen geeigneten **Algorithmus** finden.
Unter einem **Algorithmus** versteht man dabei eine **eindeutige Folge von endlich vielen Anweisungen**, die allgemein durchführbar ist.
Die **Formulierung dieses Algorithmus** in einer dem Computer verständlichen Sprache (**Programmiersprache**) nennt man ein **Programm**.

$\boxed{\text{Problem}} \Rightarrow \boxed{\text{Algorithmus}} \Rightarrow \boxed{\text{Programm}}$

Als Programmiersprache werden wir **JavaScript** verwenden, eine Sprache, die von den gängigen **Browsern** (Programme, mit denen man die Seiten des Internet anzeigt) verstanden wird. Mit JavaScript kann man Dynamik in **HTML-Dokumente** (in dieser Form werden Internet-Seiten übertragen) bringen und auch kleine mathematische Probleme lösen.

Das Problem, das wir mit JavaScript lösen wollen, lautet:

**Wie berechnet man möglichst schnell die Wurzel einer Zahl $a > 0$ ?**

Nehmen wir den Fall $a = 6$ .
Wie bestimmt der Taschenrechner den Wert $\sqrt{6} \approx 2{,}4494897423$ ?

Auch ohne Taschenrechner sieht man sofort
$2 < \sqrt{6} < 3$ , denn $2^2 = 4 < 6 < 9 = 3^2$

Durch geeignetes Suchen und Rechnen findet man die nächste Dezimalstelle von $\sqrt{6}$
$2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$ , denn $2{,}4^2 = 5{,}76 < 6 < 6{,}25 = 2{,}5^2$

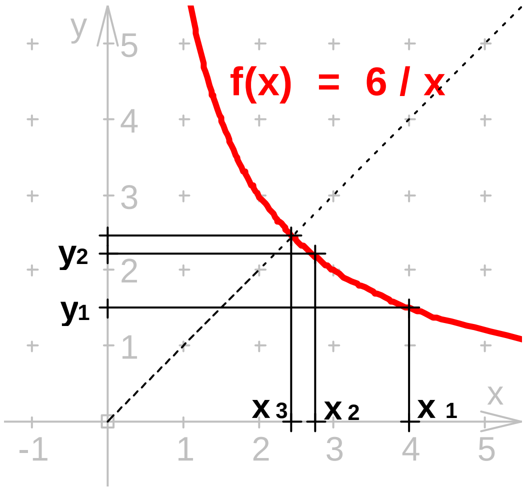
Um die nächste Dezimalstelle von $\sqrt{6}$ zu finden, muss man sich schon mehr anstrengen.

$2{,}44 < \sqrt{6} < 2{,}45$ , denn $2{,}44^2 = 5{,}9536 < 6 < 6{,}0025 = 2{,}45^2$

Einen wesentlich schnelleren und effektiveren Weg zum Ermitteln der Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{6} = 2{,}449489742$ liefert das so genannte Verfahren von Heron.

Die Idee für diesen Algorithmus ist schon sehr alt und wird nach dem griechischen Mathematiker und Ingenieur **Heron von Alexandria** (1. Jh. N. Chr.) benannt.
Das **Heron-Verfahren** war aber schon 2000 Jahre früher den Babylonier bekannt.

## Das Heron-Verfahren zur Ermittlung der Quadratwurzel von a




Im Bild wird veranschaulicht, wie man mit dem Heron-Verfahren die Wurzel von $a = 6$ berechnet.

Der Graph der Funktion f mit

$f(x) = \frac{a}{x}$ also bei uns $f(x) = \frac{6}{x}$

wird von der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten genau im Punkt $\left(\sqrt{6}\,;\sqrt{6}\right)$ geschnitten, denn

$$f(\sqrt{6}) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

Die Parallelen zu den beiden Achsen vom Punkt $\left(\sqrt{6}\,;\sqrt{6}\right)$ aus bilden zusammen mit den Achsen ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $\sqrt{6}\cdot\sqrt{6} = 6$.

Wir nähern uns dem noch unbekannten Wert von $\sqrt{6}$, indem wir mit einem beliebigen Wert $x_1$ beginnen, z.B. $x_1 = 4$.

Wir berechnen $y_1 = f(x_1) = \frac{6}{x_1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ; nun gilt $x_1 \cdot y_1 = 6$ und ersichtlich ist $x_1$ größer als $\sqrt{6}$ und $y_1$ kleiner als $\sqrt{6}$.

Im Diagramm sehen wir ein Rechteck mit den Seiten $x_1$ und $y_1$ und dem Flächeninhalt 6.

Der gesuchte Wert für $\sqrt{6}$ liegt also zwischen $y_1$ und $x_1$.

Deshalb bilden wir den Mittelwert von $x_1$ und $y_1$ und nennen ihn $x_2$. Der Wert von $x_2$ liegt sicher dichter am Wert von $\sqrt{6}$ als der Wert von $x_1$ und es gilt:

$$x_2 = (x_1 + y_1) : 2 = \left(x_1 + \frac{6}{x_1}\right) : 2 = \ldots = \frac{11}{4} = 2{,}75. \quad \left( y_2 = \frac{6}{x_2} = \frac{6\cdot 4}{11} = \frac{24}{11} = 2{,}1818\ldots \right)$$

Also gilt nun $y_2 = 2{,}1818\ldots < \sqrt{6} < 2{,}75 = x_2$. Wir sind aber noch nicht zufrieden!

Wieder bilden wir den Mittelwert von $x_2$ und $y_2$ und erhalten einen besseren Wert $x_3$.

$$x_3 = \left(x_2 + \frac{6}{x_2}\right) : 2 = \ldots = \frac{217}{88} = 2{,}4659\ldots$$

Wenn wir die Rechenschritte wiederholen, dann kommen wir dem Wert von $\sqrt{6}$ immer näher.

$$x_4 = \left(x_3 + \frac{6}{x_3}\right) : 2 = \ldots = \frac{93553}{38192} = 2{,}4495\ldots \text{ und}$$

$$x_5 = \left(x_4 + \frac{6}{x_4}\right) : 2 = \ldots = \frac{17503936993}{7145952352} \approx 2{,}449489743 \quad (\text{vgl. } \sqrt{6} \approx 2{,}449489743)$$

Schon nach 5 Schritten haben wir mit diesem **Iterationsverfahren** $\sqrt{6}$ sehr genau bestimmt.

**Aufgabe:**

Bereche nach dem Heron-Verfahren $\sqrt{5}$, $\sqrt{4}$ und $\sqrt{3}$ und vergleiche mit dem TR-Wert!

Prüfe auch, wie sich ein anderer Starwert für $x_1$ auswirkt!