Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Aufgaben zu Quader und Prisma

1. Ein Quader mit quadratischer Grundfläche hat die Höhe 6,0 cm und das Volumen 433,5 cm^3 .
   a) Berechne die Seitenlänge des Grundflächenquadrats.
   b) Berechne den Oberflächeninhalt des Quadrats.
   c) Berechne auf Millimeter gerundet die Länge der Raumdiagonale des Quaders.
   d) Bestätige deine Berechnung der Raumdiagonale durch eine maßstäbliche Zeichnung.

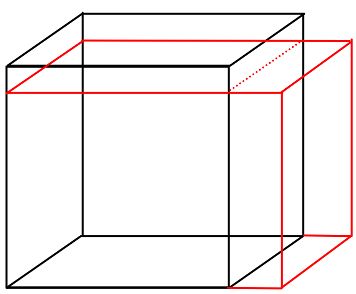
2. Ein gerades Prisma hat die Höhe 6,0 cm und als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 5,0 cm.
   a) Berechne das Volumen des Prismas auf mm^3 gerundet.
   b) Das Prisma soll so in zwei Teilprismen zerlegt werden, dass sich die beiden Volumina wie 1 : 4 verhalten.
   Gib zwei verschiedene Zerlegungen an und skizziere sie.

3. Bei einem Quader verhalten sich die drei Seiten wie 2 : 3 : 4.
   Die Oberfläche des Quaders beträgt 117 cm^2.
   Berechne die drei Kantenlängen.

4. Ein gerades Prisma hat die Höhe 8,0 cm und besitzt als Grundfläche eine Raute, deren kürzere Diagonale die Länge 6,0 cm hat. Das Volumen des Prismas beträgt 192 cm^3.
   a) Berechne die zweite Diagonallänge der Raute.
   b) Berechne die Seitenlänge der Raute.
   c) Berechne den Oberflächeninhalt des Prismas.

5. Ein Quader hat das Volumen 105 cm^3 und den Oberflächeninhalt 137 cm^2.
   Die Höhe des Quaders beträgt 3,5 cm.
   Berechne die beiden weiteren Kantenlängen des Quaders.

6. Verlängert man bei einem Würfel eine Kante um 1,0cm und verringert man eine andere Kante um 2,0 cm, so entsteht ein Quader, dessen Volumen um 63 cm^3 kleiner als das des Würfels ist.
   Berechne die Kantenlänge des Würfels.



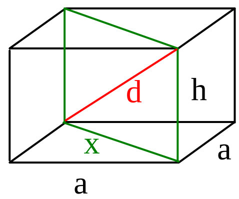
Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Aufgaben zu Quader und Prisma * Lösungen

1. a) $V = a^2 \cdot h \;\Rightarrow\; a^2 = \frac{V}{h} \;\Rightarrow\; a^2 = \frac{433{,}5\text{cm}^3}{6{,}0\text{cm}} \;\Rightarrow\; a^2 = 72{,}25\text{cm}^2 \;\Rightarrow\; a = 8{,}5\text{cm}$

   b) $S = 2 \cdot (a^2 + a \cdot h + a \cdot h) = 2 \cdot (72{,}25 + 51 + 51)\text{cm}^2 = 348{,}5\,\text{cm}^2$

   c) $d = \sqrt{a^2 + a^2 + h^2} = \sqrt{(72{,}25 + 72{,}25 + 36) \cdot \text{cm}^2} = \sqrt{180{,}5}\,\text{cm} \approx 13{,}4\,\text{cm}$

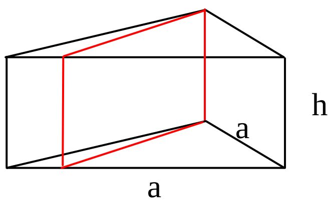
   d) Konstruiere das grüne Rechteck mit den Seiten x und h, wobei x die Diagonale im Quadrat mit Kantenlänge a = 8,5cm und h die Höhe h = 6,0cm ist.
   Die Raumdiagonale d ist die Diagonale im grünen Rechteck.

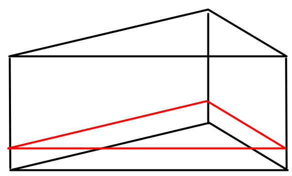


2. a) $V = G \cdot h$ und $G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \;\Rightarrow$

   $V = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 25{,}0\text{cm}^2 \cdot 6{,}0\text{cm} = \frac{75 \cdot \sqrt{3}}{2}\text{cm}^3 = 64{,}9519...\text{cm}^3 \approx 64{,}952\,\text{cm}^3$

   b)

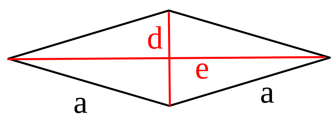




Teile eine Seite a im Verhältnis 1 : 4 Teile die Höhe im Verhältnis 1 : 4

3. Verhalten sich die Seiten des Quaders wie 2 : 3 : 4, so kann man die drei Seiten a, b und c angeben durch $a = 2x$, $b = 3x$ und $c = 4x$.
   $S = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot (2x \cdot 3x + 2x \cdot 4x + 3x \cdot 4x) = 52\,x^2$
   $S = 117\text{cm}^2 \;\Rightarrow\; 117\text{cm}^2 = 52\,x^2 \;\Rightarrow\; x^2 = 2{,}25\text{cm}^2 \;\Rightarrow\; x = 1{,}5\,\text{cm}$
   Damit haben die Kanten des Quaders die Längen 3cm, 4,5cm und 6cm.

4. a) Für die Fläche G der Raute gilt:



   $G = 2 \cdot (\frac{1}{2} d \cdot \frac{1}{2} e) = \frac{1}{2} \cdot d \cdot e$

   $V = G \cdot h = = \frac{1}{2} \cdot d \cdot e \cdot h \;\Rightarrow\; 192\text{cm}^3 = \frac{1}{2} \cdot 6{,}0\text{cm} \cdot e \cdot 8{,}0\text{cm} \;\Rightarrow\; e = 8{,}0\text{cm}$

   b) $a^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; a^2 = 9\text{cm}^2 + 16\text{cm}^2 \;\Rightarrow\; a = 5{,}0\,\text{cm}$

   c) $G = V : h = 192\text{cm}^3 : 8\text{cm} = 24\text{cm}^2$;
   $S = 2 \cdot G + 4 \cdot a \cdot h = 2 \cdot 24\text{cm}^2 + 4 \cdot 5\text{cm} \cdot 8\text{cm} = 208\,\text{cm}^2$

5. (1) $V = a \cdot b \cdot c \;\Rightarrow\; 105cm^3 = a \cdot b \cdot 3{,}5cm \;\Rightarrow\; a \cdot b = 30\,cm^2$

(2) $S = 2 \cdot (ab + ac + bc) \;\Rightarrow\; 137cm^2 = 2 \cdot (ab + a \cdot 3{,}5cm + b \cdot 3{,}5cm) \;\Rightarrow$

$68{,}5cm^2 = 30cm^2 + 3{,}5cm \cdot (a + b) \;\Rightarrow\; 38{,}5cm^2 = 3{,}5cm \cdot (a + b) \;\Rightarrow\; a + b = 11cm$

Setze nun $b = 11cm - a$ in $a \cdot b = 30\,cm^2$ ein:

$a \cdot (11cm - a) = 30\,cm^2 \;\Leftrightarrow\; 11cm \cdot a - a^2 = 30\,cm^2 \;\Leftrightarrow\; a^2 - 11cm \cdot a + 30cm^2 = 0$

$a^2 - 11cm \cdot a + 30cm^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (a - 6cm) \cdot (a - 5cm) = 0 \;\Leftrightarrow\; a_1 = 6cm \;;\; a_2 = 5cm$

Zu $a = a_1 = 6cm$ gehört die zweite Kantenlänge $b = b_1 = a_2 = 5cm$.
(Entsprechend gehört zu $a = a_2 = 5cm$ die zweite Kantenlänge $b = b_2 = a_1 = 6cm$.)

Die Kantenlängen des Quaders betragen also 6cm, 5cm und 3,5cm.

6. Die Kantenlänge des Würfels sei x.

Dann gilt: $V_{Quader} = V_{Würfel} - 63\,cm^3 \;\Leftrightarrow\; x \cdot (x + 1cm) \cdot (x - 2cm) = x^3 - 63cm^3 \;\Leftrightarrow$

$x \cdot (x^2 - 1cm \cdot x - 2cm^2) = x^3 - 63cm^3 \;\Leftrightarrow\; x^3 - 1cm \cdot x^2 - 2cm^2 \cdot x = x^3 - 63cm^3 \;\Leftrightarrow$

$-1cm \cdot x^2 - 2cm^2 \cdot x = -63cm^3 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2cm \cdot x - 63\,cm^2 = 0 \;\Leftrightarrow$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-2cm \pm \sqrt{4cm^2 + 4 \cdot 63cm^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot (-2cm \pm 16\,cm)$$

Nur die positive Lösung $x = 7cm$ ist bei der Aufgabe sinnvoll.

Die Kantenlänge des Würfel betrug also 7cm.