2. Schulaufgabe aus der Mathematik, Klasse 9b, 25.01.2007

1. Bestimme alle Lösungen der Gleichung.

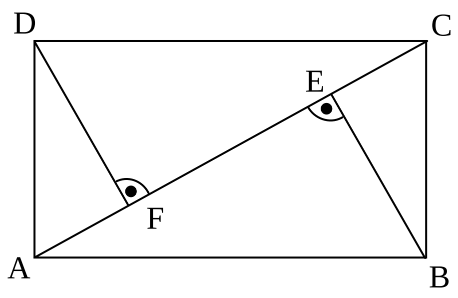
$$\frac{x}{4} - 3 = \frac{2}{x}$$

2. Für welche Werte von k hat die Gleichung genau zwei Lösungen?

$$\frac{1}{3}x^2 + (k+2)\cdot x + 3 = 0$$

3. Bestimme zwei positive Zahlen mit der folgenden Eigenschaft.
Die Differenz der beiden Zahlen beträgt 18 und das Produkt der beiden Zahlen ist um 75 größer als die zehnfache Summe dieser Zahlen.

4. Fällt man in einem Rechteck $ABCD$ von den Ecken B und D jeweils das Lot auf die Diagonale $[AC]$, so erhält man die Punkte E und F (siehe Bild!).



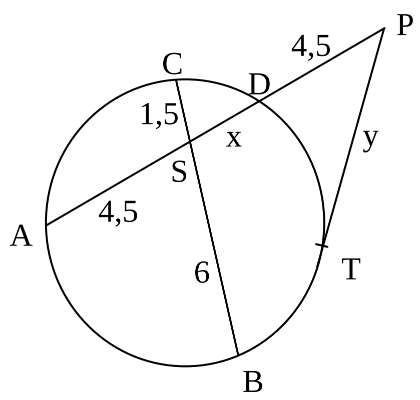
a) Gib alle zueinander ähnlichen Dreiecke in dieser Figur an.

b) Zeige: $\overline{AF}\cdot\overline{AE} = \overline{EB}^2$

5. Berechne in der abgebildeten Figur die beiden Streckenlängen $x = \overline{SD}$ und $y = \overline{TP}$.

Die Figur zeigt einen Kreis mit den Sehnen [AD] und [BC], der Sekante AP und der Tangente PT.

Es gilt:
$\overline{AS} = 4{,}5$; $\overline{CS} = 1{,}5$; $\overline{SB} = 6$; $\overline{DP} = 4{,}5$



6. Konstruiere auf deinem Blatt eine Strecke s der Länge $\sqrt{15}$ cm.
Erkläre in Stichpunkten deine Vorgehensweise.

Aufgabe	1	2	3	4a	b	5	6	Summe
Punkte	5	5	7	3	4	5	5	34

Gutes Gelingen! G.R.

2. Schulaufgabe aus der Mathematik, Klasse 9b, 25.01.2007 * Lösung

1. $\frac{x}{4} - 3 = \frac{2}{x} \quad / \cdot 4x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 12x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 12x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (12 \pm \sqrt{144 + 32}\,) = \frac{1}{2} \cdot (12 \pm 2\sqrt{44}\,) = 6 \pm 2\sqrt{11}$

2. $\frac{1}{3}x^2 + (k+2) \cdot x + 3 = 0$ hat zwei Lösungen, falls $D = (k+2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 > 0$

$(k+2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 + 4k + 4 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \cdot (k+4) > 0 \quad \Leftrightarrow$

$k < -4$ oder $k > 0$;

Für $k \in\,]-\infty\,; -4[\, \cup\,]\,0\,; \infty[\; = \mathbb{R} \setminus [-4\,;\,0\,]$ hat die Gleichung genau 2 Lösungen.

3. (1) $y - x = 18$ (2) $x \cdot y = 75 + 10 \cdot (x+y)$

(1) $y = 18 + x$ eingesetzt in (2) $x \cdot (18 + x) = 75 + 10 \cdot (x + 18 + x) \quad \Leftrightarrow$

$x^2 + 18x = 75 + 20x + 180 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 255 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x - 255 = 0 \quad x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 255}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(2 \pm 2\sqrt{256}\right) = 1 \pm 16$

$x_1 = 17 \quad (x_2 = -15 < 0)$ und $y_1 = 18 + x_1 = 35$

Die beiden gesuchten Zahlen lauten 17 und 35.

4. a) Ähnlich sind die folgenden Dreiecke:

$\Delta ABC \sim \Delta CDA \sim \Delta AEB \sim \Delta CFD \sim \Delta DFA \sim \Delta BEC$

b) Wegen $\Delta AEB \sim \Delta DFA$ folgt $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{FA}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AE} \cdot \overline{FA} = \overline{DF} \cdot \overline{EB}$

wegen $\overline{EB} = \overline{DF} \quad \Rightarrow \quad \overline{AE} \cdot \overline{FA} = \overline{EB}^{\,2}$ und damit $\overline{AF} \cdot \overline{AE} = \overline{EB}^{\,2}$

5. Nach dem Sehnensatz gilt: $4{,}5 \cdot x = 1{,}5 \cdot 6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1{,}5 \cdot 6}{4{,}5} = \frac{1 \cdot 6}{3} = 2$

Nach dem Sekanten-Tangentensatz gilt: $\overline{AP} \cdot \overline{DP} = \overline{PT}^{\,2} \quad \Leftrightarrow$

$(4{,}5 + 2 + 4{,}5) \cdot 4{,}5 = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 49{,}5 = y^2$

$\Leftrightarrow \quad y = +\sqrt{\frac{99}{2}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 11 \cdot 2}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{22}$

6. Nach dem Sehnensatz gilt:

$5\text{cm} \cdot 3\text{cm} = x \cdot x$ d.h.

$x = \sqrt{15}$ cm