2. Klausur im LK Physik K13/1 am 12.01.2005

1. Rutherfordsches Atommodell

Nach dem Atommodell von Rutherford befindet sich die positive Ladung und fast die gesamte Atommasse im Kern.

a) Aus welchem Versuchsergebnis konnte Rutherford schließen, dass der Radius des Atomkerns wesentlich kleiner als der Atomradius ist?

b) Schießt man Alphateilchen mit Anfangsenergien von mehr als 27 MeV auf eine Goldfolie, so beobachtet man Abweichungen von der rutherfordschen Streuformel.
Für welche Streuwinkel treten diese Abweichungen zuerst auf?
Schätzen Sie den Kernradius von Goldatomen mit einer Rechnung ab!
Wieso ist der von Ihnen so ermittelte Wert noch etwas zu groß?
(Der Rückstoß des Kerns darf vernachlässigt werden!)

2. Franck-Hertz-Versuch und bohrsches Atommodell für Alkaliatome

Der Franck-Hertz-Versuch dient dem Nachweis von Energiestufen im Atom.

a) Skizzieren Sie den Versuchsaufbau, beschreiben Sie die Versuchsdurchführung und stellen Sie das Versuchergebnis geeignet dar.

b) Wie kann man das Versuchsergebnis erklären?

Beim Franck-Hertz-Versuch mit Quecksilber konnte als niedrigste Anregungsstufe ein Wert von 4,9eV gefunden werden.
Im Folgenden soll rechnerisch ermittelt werden, welche niedrigste Anregungsstufe zu erwarten ist, wenn man beim Franck-Hertz-Versuch Quecksilber durch Natrium ersetzt.

Das Na-Atom kann vereinfacht als Einelektronensystem nach der bohrschen Theorie behandelt werden. Hierbei „kreist" das einzige Elektron der M-Schale um den Atomrumpf, der die effektive Kernladungszahl $Z_{eff} = 1{,}84$ zugesprochen erhält.
(Diesen Wert von Z_{eff} bestimmt man aus der experimentell bekannten Ionisationsenergie.)
Ferner wird angenommen, dass bei Anregung nur dieses Elektron der M-Schale von der Bahn $n = 3$ auf höhere Bahnen wechselt.

c) Leiten Sie aus dem Kraftansatz und der Quantenbedingung die Geschwindigkeit v_n und den Radius r_n des Elektrons auf der n-ten Quantenbahn her.

$$v_n = \frac{Z_{eff} \cdot e^2}{2 \cdot h \cdot \varepsilon_o} \cdot \frac{1}{n} \quad ; \quad r_n = \frac{h^2 \cdot \varepsilon_o}{\pi \cdot m \cdot e^2 \cdot Z_{eff}} \cdot n^2 \qquad (m = m_e)$$

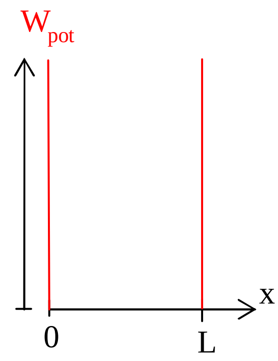
d) Bestimmen Sie aus der kinetische Energie $W_{kin,n}$ und der potentiellen Energie $W_{pot,n}$ die Gesamtenergie W_n des Elektrons auf der n-ten Quantenbahn.
(Potentielle Energie im Unendlichen soll dabei Null sein!)

$$W_n = -\frac{e^4 \cdot m \cdot {Z_{eff}}^2}{8 \cdot {\varepsilon_o}^2 \cdot h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

e) Welche niedrigste Anregungsstufe ergibt sich nun für Natrium? Begründen Sie, dass nach dieser vereinfachten Modellrechnung der Franck-Hertz-Versuch mit Natrium von einer Leuchterscheinung im Sichtbaren begleitet ist.

Fortsetzung auf der Rückseite!

3. Elektron im eindimensionalen Potentialkasten



Das quantenmechanische Atommodell ist mathematisch sehr anspruchsvoll.
Ein sehr vereinfachtes Modell hierzu ist der eindimensionale Potentialkasten mit „unendlich hohen Wänden“, in welchem ein Elektron „eingesperrt“ ist.
Die „Breite“ des Kastens wird mit L angegeben.

a) Das Elektron wird durch eine geeignete Wellenfunktion Ψ_n beschrieben.
Bestimmen Sie die möglichen Impulse p_n und Gesamtenergien E_n des Elektrons.

(Teilergebnis: $E_n = \frac{h^2}{8 \cdot m \cdot L^2} \cdot n^2$)

b) Erläutern Sie den Begriff der Nullpunktsenergie.

c) Das Elektron im eindimensionalen Potentialkasten soll zum Leuchten angeregt werden. (Übergang vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand)
Bestimmen Sie näherungsweise den größten Wert von L, für den das Elektron im Sichtbaren strahlt.

Aufgabe	1a	b	2a	b	c	d	e	3a	b	c	Σ
Punkte	2	6	7	4	6	4	5	4	2	5	45

Gutes Gelingen! G.R.

Lösung:

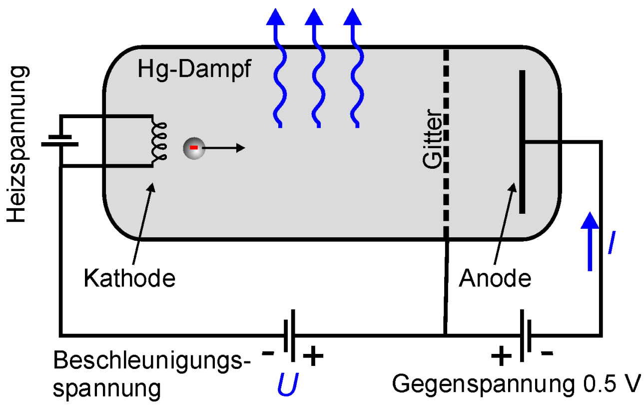
1. a) Nur wenige α-Teilchen werden gestreut, zum äußerst geringen Teil aber sogar unter einem Streuwinkel von bis zu 180°.

   b) Abweichungen treten zuerst für Streuwinkel $\vartheta = 180^o$ auf, weil hierbei die α-Teilchen dem Kern am nächsten kommen.
   Zentraler Stoß: $E_{kin,vorher} = E_{pot,Umkehr}$

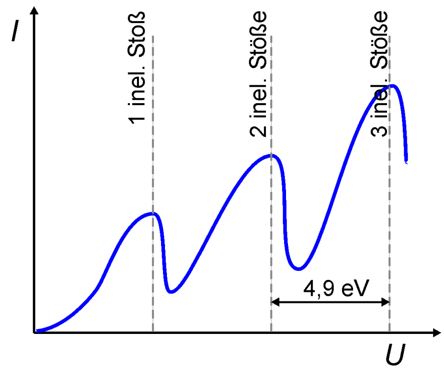
$$27\,MeV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Ze\cdot 2e}{d} \quad mit \;\; Z = 79$$ mit d = minimaler Abstand α-Teilchen – Kern.

$$d = \frac{79\cdot 2\cdot e^2}{4\pi\cdot\varepsilon_o\cdot 27\cdot 10^6\, eV} = 8{,}4\cdot 10^{-15}\, m \quad ; \quad d = r_{Au-Kern} + r_{\alpha-Teilchen} > r_{Au-Kern}$$

2. a) In der Röhre (geringer Druck) befindet sich Hg-Dampf (Temperatur ca. 170°C). Die Auffängerstromstärke I wird (über einen Messverstärker) in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung U (0V bis ca. 30V) gemessen.



   Man beobachtet die angegebenen Maxima und Minima von I in Abhängigkeit von U.



   b) Erklärung:
   Elektronen der kinet. Energie 4,9eV können Hg-Atome anregen (unelastische Stöße). Geschieht dies unmittelbar vor dem Gitter, dann können die Elektronen nicht mehr gegen die Gegenspannung anlaufen und I nimmt deshalb deutlich ab. Finden die Stöße aber weiter vor dem Gitter statt, dann erhalten die Elektronen bis zum Gitter wieder kinetische Energien von mehr als 0,5 eV und erreichen so die Auffängeranode wieder. Mit zunehmender Spannung U gibt es immer mehr Stoßzonen in der Röhre, die alle parallel zum Gitter liegen.

   c) Kraftansatz: $\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Z_{eff}\cdot e\cdot e}{r^2}$ Quantenbedingung: $2\pi r\, m v = n h$

$v = \frac{n h}{2\pi r m}$ in Kraftansatz eingesetzt: $\frac{m}{r}\cdot\frac{n^2 h^2}{4\pi^2 r^2 m^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{Z_{eff}\cdot e\cdot e}{r^2} \quad\Rightarrow$

$$r = m\cdot\frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m^2}\cdot\frac{4\pi\varepsilon_o}{Z_{eff}\cdot e^2} = \frac{h^2\varepsilon_o}{\pi m Z_{eff}\, e^2}\cdot n^2 \quad \text{und} \quad v = \frac{n h}{2\pi m}\cdot\frac{\pi m Z_{eff}\, e^2}{h^2\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{Z_{eff}\, e^2}{2 h\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{n}$$

d) $W_{pot} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Z_{eff} \cdot e \cdot e}{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{Z_{eff} \cdot e^2 \cdot \pi \cdot m \cdot Z_{eff} \cdot e^2}{n^2 h^2 \varepsilon_o} = -\frac{Z_{eff}^{\ 2} \cdot e^4 \cdot m}{4 h^2 \varepsilon_o^{\ 2}} \cdot \frac{1}{n^2} \quad mit \ \ n \geq 3$

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{Z_{eff}^{\ 2} \cdot e^4}{4h^2 \varepsilon_o^{\ 2}} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{Z_{eff}^{\ 2} \cdot e^4 \cdot m}{8h^2 \varepsilon_o^{\ 2}} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$W_{ges} = -\frac{Z_{eff}^{\ 2} \cdot e^4 \cdot m}{4h^2 \varepsilon_o^{\ 2}} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{Z_{eff}^{\ 2} \cdot e^4 \cdot m}{8h^2 \varepsilon_o^{\ 2}} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{Z_{eff}^{\ 2} \cdot e^4 \cdot m}{8h^2 \varepsilon_o^{\ 2}} \cdot \frac{1}{n^2} \quad mit \ n \geq 3$$

e) $\Delta W = |W_3 - W_4| = \frac{Z_{eff}^{\ 2} \cdot e^4 \cdot m}{8h^2 \varepsilon_o^{\ 2}} \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) = Z_{eff}^{\ 2} \cdot R \cdot hc \cdot \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) =$

$$= 1{,}84^2 \cdot 1{,}097 \cdot 10^7 \cdot \frac{1}{m} \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}\, Js \cdot 3{,}0 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s} \cdot \frac{7}{144} = 3{,}6 \cdot 10^{-19}\, J = 2{,}2\, eV$$

$$\frac{hc}{\lambda} = hf = \Delta W \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{hc}{\Delta W} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\, Js \cdot 3{,}0 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}}{3{,}6 \cdot 10^{-19}\, J} = 5{,}5 \cdot 10^{-7}\, m$$

550 nm liegen im Sichtbaren (gelb!).

3. a) $L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad und \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad p_n = \frac{hn}{2L} = \frac{h}{2L} \cdot n \quad ; n \geq 1$

$$E_n = E_{ges,n} = E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\,4L^2} \cdot n^2 = \frac{h^2}{8L^2 m} \cdot n^2 \quad ; \ n \geq 1$$

b) Auch im Grundzustand (n=1) hat das Elektron eine von 0 verschiedene Gesamtenergie, die so genannte Nullpunktsenergie, obwohl $E_{pot} = 0$ gilt.

c) $E_{photon} = hf = \Delta E = \frac{h^2}{8L^2 m} \cdot (m^2 - n^2)$ *soll für größtmögliches L im Sichtbaren liegen,*

d.h. wegen 400 nm < hf < 800 nm und L^2 umgekehrt proportional zu f muss gelten: hf soll möglichst klein sein, also λ = 800 nm.
Zudem n = 1 und m = 2 und damit

$$\frac{hc}{800\,nm} = \frac{h^2}{8L^2 m} \cdot (2^2 - 1^2) \quad \Rightarrow$$

$$L = \sqrt{\frac{3h \cdot 800\,nm}{8 \cdot m \cdot 3{,}0 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}\, Js \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-7}\, m}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\, kg \cdot 3{,}0 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}}} = 8{,}5 \cdot 10^{-10}\, m$$