Übungsblatt zu den Ableitungsregeln für die Klasse 11 b (mn) * März 2002

1. Geben Sie den Differenzierbarkeitsbereich von f an und berechnen Sie f '.
   Vergessen Sie hierbei nicht, f ' so weit wie möglich zu vereinfachen.

a) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

b) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (2x - 1)$

c) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1) \cdot \sin(x)$

d) $f(x) = x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

e) $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

f) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{4x^5 + 1}$

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 2}}$

i) $f(x) = \frac{(x^2 - x) \cdot (x+1)}{\sqrt{x^2 + x}}$

2. Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich und ermitteln Sie anschließend alle Punkte des Graphen mit horizontaler Tangente.

a) $f(x) = -\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}$

b) $f(x) = 2(x^2 - 4)^3$

c) $f(x) = (x^2 - 3x + 3)^5$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 2}$

e) $f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

f) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot \sqrt{x^2 + 2}$

3. Bestimmen Sie bei den folgenden Funktionen jeweils den Definitionsbereich und alle Punkte des Graphen mit horizontaler Tangente.
   Untersuchen Sie dann das Verhalten der Funktion an den Grenzen des Definitionsbereichs und skizzieren Sie (qualitativ) den Verlauf des Graphen.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 2}$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 3}$

d) $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$

f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3}$

G.R.

Übungsblatt zu den Ableitungsregeln für die Klasse 11 b (mn) * März 2002

Lösungen:

1\. a) $D_{f'} = \mathbb{R}^+$ $\quad f'(x) = \dfrac{3}{4\cdot\sqrt[4]{x}}$

b) $D_{f'} = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 6x^2 - 2x + 2$

c) $D_{f'} = \mathbb{R}^+$ $\quad f'(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + (2\sqrt{x} + 1)\cdot\cos(x)$

d) $D_{f'} = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \sin(x)\cos(x) + x(\cos(x))^2 - x(\sin(x))^2$

e) $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\left\{(2z+1)\frac{\pi}{2} \;/\; z\in\mathbb{Z}\right\}$; $f'(x) = 1 + (\tan(x))^2 = \dfrac{1}{(\cos(x))^2}$

f) $D_{f'} = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$

g) $D_{f'} = [-\sqrt[5]{\frac{1}{4}}\,;\,\infty[$; $f'(x) = \dfrac{20x^4}{3\cdot\sqrt[3]{(4x^5+1)^2}}$

h) $D_{f'} = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-3x}{(3x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$

i) $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus[-1\,;0]$; $f'(x) = \dfrac{4x^4+5x^3-x}{2(x^2+x)^{\frac{3}{2}}}$

2\. a) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = -\dfrac{x\cdot(2x^2+3)}{\sqrt{x^4+3x^2+1}}$ $\quad P(0/-1)$

b) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 12x\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)^2$

$P_1(0/-128)$; $P_2(-2/0)$; $P_3(2/0)$

c) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 5(x^2 - 3x + 3)^4\cdot(2x-3)$ $\quad P(\frac{3}{2} / \frac{243}{1024})$

d) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{4(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2}$ $\quad P_1(1/-1)$; $P_2(-2/2)$

e) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{x+2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad P(-2/-\sqrt{5})$

f) $D_f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{3x^3}{\sqrt{x^2+2}}$ $\quad P(0/-4\sqrt{2})$