Mathematik * K13 * Kurvendiskussion einer gebrochenrationalen Funktion *

Bekannte Ableitungsregeln (vgl. FS. S. 60f.)

Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ Kettenregel: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Quotientenregel: $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$

Bekannte Punkte bei Kurvendiskussionen (vgl FS. S. 62 ff.)

Definitionsbereich ermitteln | Nullstellen ermitteln | Symmetrie (falls erkennbar)
Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs
1. Ableitung errechnen | horizontale Tangenten | Extremwerte (Maxima, Minima)
2. Ableitung errechnen | Krümmungsverhalten | Flachpunkte, Wendepunkte
(gegebenenfalls: Flächenberechnungen mit Hilfe einer Stammfunktion)

Diese Punkte gelten auch für eine gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_o}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_o} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Bei gebrochenrationalen Funktionen ist das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs sehr wichtig. An den Nullstellen des Nenners befinden sich Definitionslücken der Funktion f. Der Graph von f hat dort senkrechte Asymptoten.

Für $x \rightarrow \pm\infty$ erhält man

$f(x) \rightarrow 0$, falls $m > n$

$f(x) \rightarrow \frac{a_n}{b_m}$, falls $n = m$

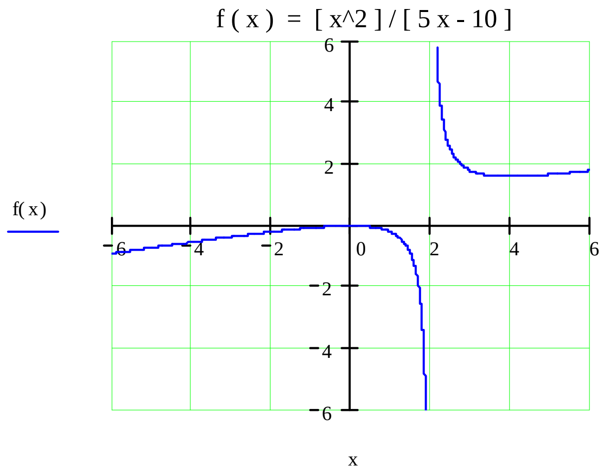
$f(x) \rightarrow c_1 x + c_2$, falls $n = m + 1$ und $f(x) = c_1 x + c_2 + \frac{R(x)}{N(x)}$

Polynomdivision

d.h. der Graph von f hat die schräg liegende Aysmptote mit der Gleichung $y = c_1 x + c_2$.

$f(x) \rightarrow +\infty$

oder $f(x) \rightarrow -\infty$, falls $n > m$



Beispiel:

$f(x) = \frac{x^2}{5x - 10}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; senkrechte Asymptote bei $x = 2$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\rightarrow} 2} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \overset{<}{\rightarrow} 2} f(x) = -\infty$

$f(x) = 0{,}2\,x + 0{,}4 + \frac{4}{5x - 10}$

(Polynomdivision)

d.h. der Graph von f hat für $x \rightarrow \pm\infty$ die schräge Asymptote $y = 0{,}2\,x + 0{,}4$

$f'(x) = \frac{x(x-4)}{5(x-2)^2}$ d.h. waagrechte Tangenten bei $x_1 = 0$ und bei $x_2 = 4$.

Wegen Vorzeichenwechsels von f ‘ bei $x_1 = 0$ (von + auf -) hat G_f bei $x_1 = 0$ einen Hochpunkt HOP(0 ; 0)

Entsprechend Tiefpunkt TIP (4 ; 1,6)

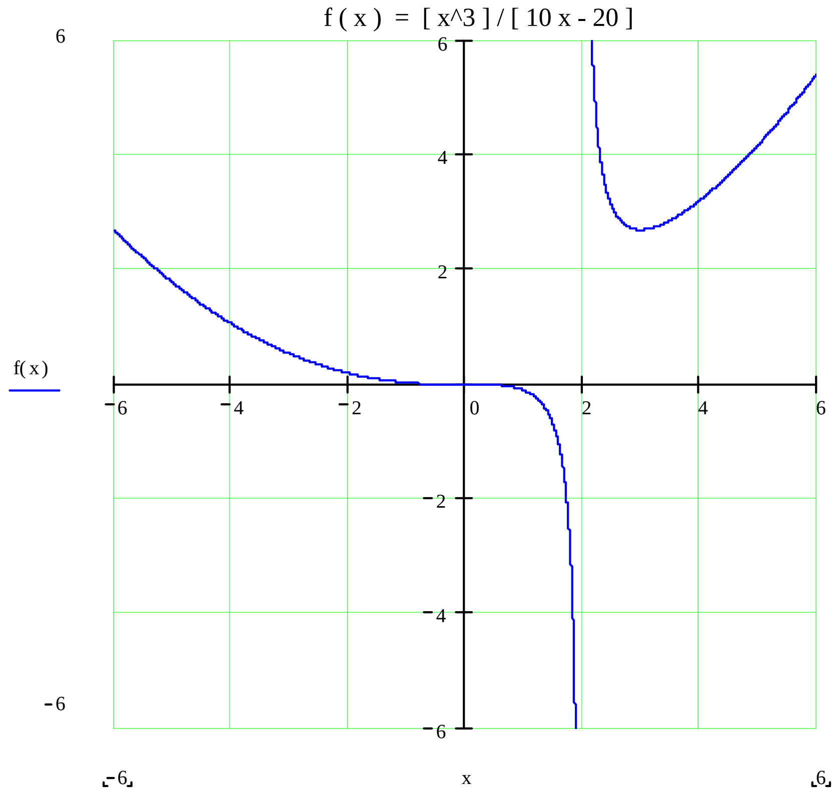
Diskutieren Sie entsprechend

a) $f(x) = \frac{x^3}{10x - 20}$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{10x - 20}$

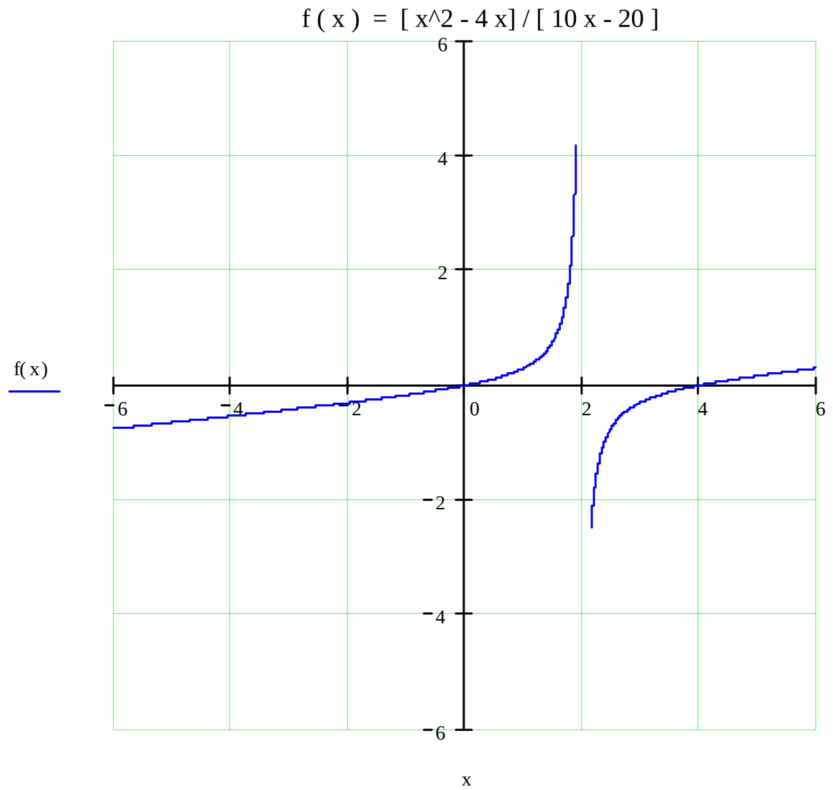
Mathematik * K13 * Kurvendiskussion einer gebrochenrationalen Funktion *

Lösungen:

a)



b)



G.R.