Anwendungen der Integralrechnung in der Physik * LK M * K12

Bewegungen

Ein Körper der Masse bewege sich in x-Richtung.
x (t) gebe zu jedem Zeitpunkt t den Aufenthaltsort x an.
Aus x (t) kann man durch Differenzieren zu jedem Zeitpunkt die Geschwindigkeit v (t) und die Beschleunigung a (t) errechnen, denn es gilt:

$$v(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{x(t+\triangle t) - x(t)}{\triangle t} = \frac{d\,x(t)}{d\,t} = \dot{x}\,(t)$$

$$a(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{v(t+\triangle t) - v(t)}{\triangle t} = \frac{d\,v(t)}{d\,t} = \dot{v}\,(t) = \ddot{x}\,(t)$$

Da nach dem Newtonschen Gesetz $F = a\,m$ gilt, kann man aus a (t) nun die Kraft auf den Körper der Masse m ermitteln. $F(t) = \frac{a(t)}{m}$.

Umgekehrt kann man aus der Kenntnis der resultierend wirkenden Kraft F(t) und den sogenannten <u>Anfangsbedingungen</u> $v_o = v(t_o)$ [Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_o] und $x_o = x(t_o)$ [Aufenthaltsort zum Zeitpunkt t_o] zu jedem <u>Zeitpunkt</u> die Geschwindigkeit v (t) und den Aufenthaltsort x (t) durch Integration ermitteln.

$\int a(t)\,dt = \int \dot{v}(t)\,dt = v(t) + c$ Nach Einsetzen geeigneter Grenzen folgt

$\int_{t_o}^{t} a(\tau)\,d\tau = v(t) - v_o$ also $v(t) = \int_{t_o}^{t} a(\tau)\,d\tau + v_o$

und analog

$\int v(t)\,dt = \int \dot{x}(t)\,dt = x(t) + c$ und damit $x(t) = \int_{t_o}^{t} v(\tau)\,d\tau + x_o$.

Lösen Sie nun die folgenden Aufgaben!

1) Senkrechter Wurf nach oben
Ein Stein der Masse 0,30 kg wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $15\frac{m}{s}$ aus der Anfangshöhe von 5,0m über dem Boden von einem Fenster aus senkrecht nach oben geworfen. Bestimmen Sie vom Abwurf bis zum Auftreffen des Steins auf dem Boden zu jedem Zeitpunkt sowohl die Geschwindigkeit v(t) wie auch den Ort y(t) des Steins.
Bestimmen Sie mit diesen beiden Funktionen auch die Wurfhöhe, die Wurfzeit und die Auftreffgeschwindigkeit des Steins!

2) Ein PKW der Masse 1,2 t bewege sich geradlinig (in x-Richtung) mit der konstanten Geschwindigkeit von $10\frac{m}{s}$ und befinde sich zum Zeitpunkt $t_o = 0s$ am Ort $x_o = 0m$.
Für 8,0s lang wird der PKW nun durch die Kraft $F(t) = t \cdot (8{,}0s - t)\,\frac{100\,N}{s^2}$ beschleunigt.
Geben Sie für diesen Zeitraum v(t) und x(t) an.
Welche Geschwindigkeit hat der PKW nach diesen 8,0 Sekunden und welchen Weg hat er dabei in den ersten 4,0s und in den zweiten 4,0s zurückgelegt?

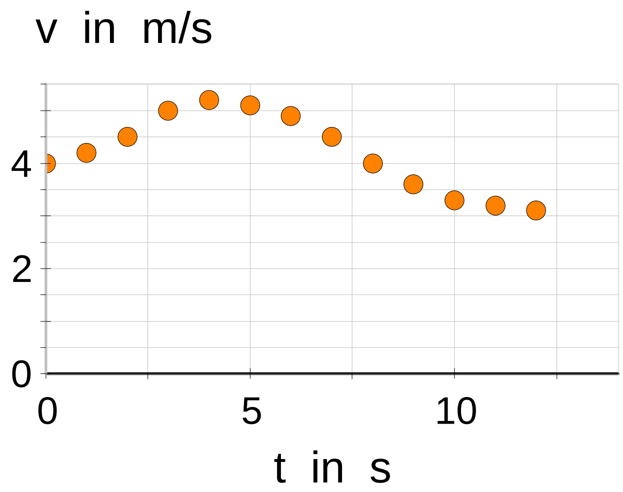
3) Eine Rakete (Anfangsmasse 20kg) stößt 12 Sekunden lang pro Sekunde 1,0kg Verbrennungsgase mit der Geschwindigkeit $500\,\frac{m}{s}$ aus und erzeugt so eine Schubkraft von 500N (Nachweis!). Geben Sie für die senkrecht nach oben startende Rakete die Geschwindigkeit v (t) für die ersten 12 Sekunden als Integralfunktion an.
Für den Ortsfaktor darf dabei der konstante Wert $g = 10\,\frac{N}{kg} = 10\,\frac{m}{s^2}$ verwendet werden.

G.R.

Anwendungen der Integralrechnung in der Physik * LK M * K12

Diagramme

Begründen Sie,
dass die Fläche unter dem Graphen
in einem t-v-Diagramm
den zurückgelegten Weg angibt.



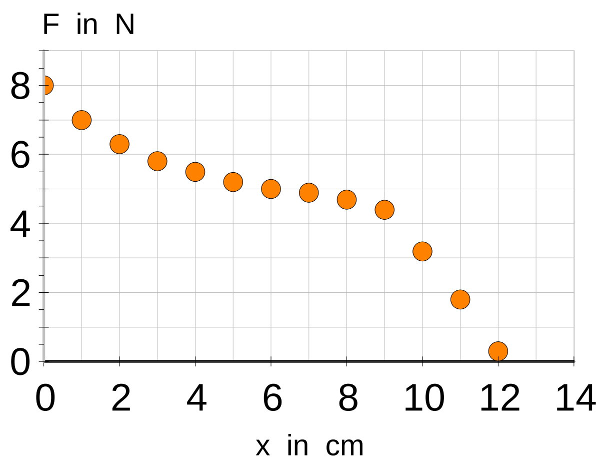
Aufgaben:

Berechnen Sie aus dem gegebenen v(t) die zugehörige Ortsfunktion x(t).
Geben Sie jeweils auch an, an welcher Stelle sich der Körper zum Zeitpunkt $t_1 = 3{,}0\,\text{s}$ befindet.

a) $v(t) = 10\frac{\text{m}}{\text{s}} + 2{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t \qquad 0 \le t \le 5{,}0\,\text{s} \qquad x_o = 0\,\text{m}$

b) $v(t) = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}\left(1 - \frac{1\,\text{s}^2}{t^2}\right) \qquad 0 \le t \qquad x_o = 0\,\text{m}$

Begründen Sie,
dass die Fläche unter dem Graphen
in einem x-F-Diagramm
die verrichtete Arbeit angibt.



Aufgaben:

a) Welche Hubarbeit ist zu verrichten, um eine Masse von 1,0kg um 350km senkrecht von der Erdoberfläche zu entfernen?
(Daten: Erdradius R = 6370 km; Gravitationskonstante $6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$;
$M_{\text{Erde}} = 6{,}0\cdot 10^{24}\,\text{kg}$)

b) Mit welcher Geschwindigkeit müsste ein Massestück senkrecht von der Erde weggeschleudert werden, damit es niemals mehr zur Erde zurück fällt?

G.R.