Übungsaufgaben zur analytischen Geometrie für den LK Mathematik * K13

Gibt es unterschiedliche Wege zur Lösung der folgenden Aufgaben?
Skizzieren Sie gegebenenfalls alternative Lösungsmöglichkeiten und entscheiden Sie sich für den Weg mit dem geringsten Rechenaufwand.

1. Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden g und h voneinander!

$$g: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Wo liegen alle Punkte P, für die das Volumen der dreiseitigen Pyramide $ABCP$ den Wert $V = 6$ hat?
   Es gelte $A(1/2/3)$, $B(4/2/6)$ und $C(2/0/5)$.

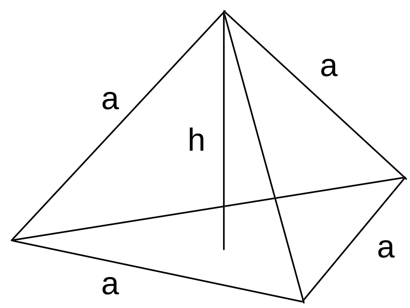
3. Welche Punkte der Kugel um den Mittelpunkt $M(13/6/14)$ mit dem Radius $r = 6$ haben von der Geraden g minimalen Abstand? Bestimmen Sie diesen minimalen Abstand!

$$g: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. Durch $E_k: \ x_1 - kx_2 + 2x_3 - 4 = 0$ mit $k \in R$
   wird eine Schar von Ebenen angegeben.
   a) Beschreiben Sie diese Schar möglichst genau! Begründen Sie, dass die Schnittmenge aller Ebenen der Schar eine Geraden g ist. Bestimmen Sie eine Gleichung von g.
   b) Gibt es eine Ebene F, die g enthält aber nicht zur Schar gehört?
   c) Gibt es Geraden h, die mit <u>keiner</u> Ebene der Schar gemeinsame Punkte haben?

5. Aufgaben zum regulären Tetraeder.
   (vgl. FS S. 34)

   a) Bestätigen Sie die Formel für das Volumen
   $$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$
   b) Unter welchem Winkel schneiden sich die Flächen des Tetraeders?
   c) Wo liegt der Mittelpunkt der dem Tetraeder umbeschriebenen Kugel? Wie groß ist der Radius?
   d) Wo liegt der Mittelpunkt der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel? Wie groß ist der Radius?



G.R.

Übungsaufgaben zur analytischen Geometrie für den LK Mathematik * K13

Lösungen:

1. Richtung $\vec{v}$ der kürzesten Verbindung zwischen den Geraden:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ebene E mit $g \subset E$ und $\vec{v}$ ist 2. Richtungsvektor lautet

$E: 16x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 67 = 0$ (Beachte: $\overrightarrow{n_E} = \vec{v} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$)

Fußpunkt F_h auf h ermitteln:

$\{F_h\} = E \cap h$ $\quad F_h = F_h = \left(-\frac{175}{11} \,/\, -\frac{524}{11} \,/\, \frac{131}{11}\right)$

Nun analog Fußpunkt F_g auf g ermitteln oder etwas kürzer neue Hilfsgerade k einführen:

$k: \vec{X} = \overrightarrow{F_h} + \sigma \vec{v}$; $k \cap g = \{F_g\}$; die Rechnung liefert

$F_g = \left(-\frac{173}{11} \,/\, -\frac{526}{11} \,/\, \frac{125}{11}\right)$ mit $\sigma = -\frac{2}{11}$, d.h. der gesuchte Abstand d beträgt

$d = \left|\overrightarrow{F_h F_g}\right| = \frac{2}{11}\sqrt{11}$ oder $d = |\sigma| \cdot \left|\vec{v}\right| = \frac{2}{11}\sqrt{11}$

2. Die Punkte A, B und C legen die Ebene E fest.

$E: 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 6 = 0$ ($\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$)

Flächeninhalt $F_{\Delta ABC} = \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{n_E}\right| = \frac{9}{2}$ und $6 = V = \frac{1}{3} F_{\Delta ABC} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = 4$

Die gesuchten Punkte P liegen also in zwei zu E parallelen Ebenen im Abstand $h = 4$, d.h.

$E_{1/2}: \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - 2x_3 + 6) \pm 4 = 0$

Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man mit $V = 6$ für die gesuchten Punkte $P(p_1/p_2/p_3)$ ansetzt:

$$V = \pm\frac{1}{6}\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AP}) \quad \text{, d.h.} \quad \pm 36 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ (p_1 - 1) & (p_2 - 2) & (p_3 - 3) \end{vmatrix}$$

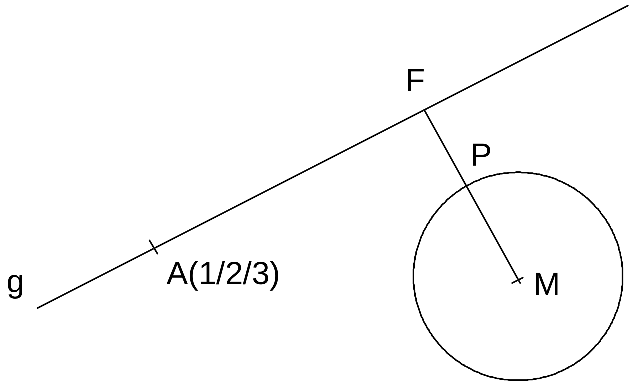
es folgt $\pm 36 = 6p_1 - 3p_2 - 6p_3 + 18$

und das entspricht gerade den beiden Ebenen $E_{1/2}$.

3.

Berechne zuerst

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$$



Fußpunkt F des Lotes von M auf g über senkrechte Projektion berechnen:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}}{(\sqrt{3^2+5^2+4^2}\,)^2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad F(7/12/11)$$

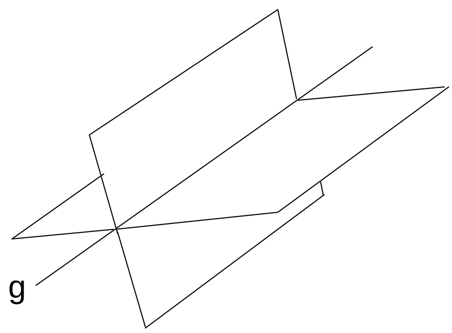
$$\overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \left|\overrightarrow{MF}\right| = 9 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MP} = 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$P(9/10/12)$ und $d = \overline{PF} = 9 - 6 = 3$

4. a) $E_k \cap E_j$ liefert (1) $x_2 = 0$ und (2) $x_1 + 2x_3 - 4 = 0$

d.h. jede Ebene der Schar hat die gleiche Spurgerade in der x_1x_3 - Ebene (d.i. $x_2 = 0$).
Berechne zwei beliebige Punkte dieser gemeinsamen Spurgeraden, z.B.
$P(4/0/0)$ und $Q(0/0/2)$

damit gilt $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

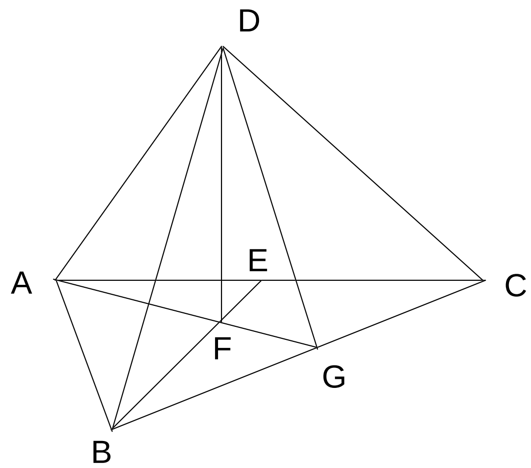


b) $F : x_2 = 0$ (die x_1x_3 - Ebene) gehört nicht zur Schar.

$$\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{n_{E_k}}$$

c) alle Geraden $h \parallel g$ mit $h \subset F$ und $h \neq g$ haben mit keinem E_k einen gemeinsamen Punkt.

5. a)
E und G halbieren die jeweiligen Kanten.
Elementargeometrische Berechnungen liefern:



$\overline{AG} = \overline{BE} = \overline{DG} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$

$\overline{AF} = \overline{BF} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,a$ und

$\overline{EF} = \overline{FG} = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a$

$h = \overline{DF} = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,a$

Damit $F_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot \overline{AG} = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2$

und $V = \frac{1}{3}F_{ABC} \cdot h = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

b)
Der gesuchte Winkel α entspricht dem Winkel $\angle DGA$, d.h.
$\cos\alpha = \frac{\overline{FG}}{\overline{DG}} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70{,}529^\circ$
umständlicher ist es, wenn man das Tetraeder in ein Koordinatensystem einträgt:

$A(0/0/0)$; $C(0/a/0)$; $B(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a / \frac{1}{2}a / 0)$; $D(\frac{1}{6}\sqrt{3}\,a / \frac{1}{2}a / \frac{1}{3}\sqrt{6}\,a)$ und nun

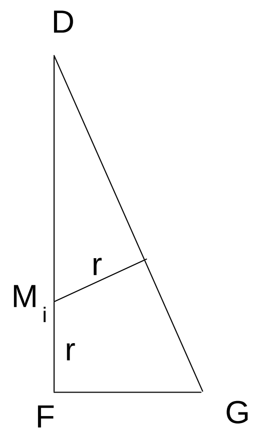
die Normalenvektoren der Ebenen E(A,C,D) und F(A,B,D) ermittelt.
Der Winkel zwischen diesen Normalenvektoren entspricht dem Winkel α .

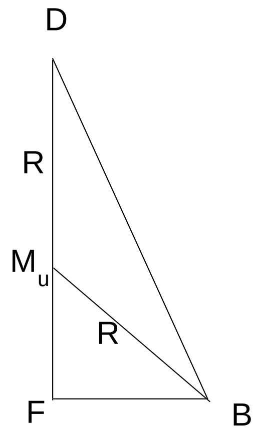
Es gilt $\overrightarrow{n_E} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2\sqrt{6} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

c) und d) löst man elemtargeometrisch
Wegen der Symmetrie liegen beide Mittelpunkte auf [DF].
"Umkugel" mit Radius R und Mittelpunkt M_u :

$R^2 = (h - R)^2 + \overline{FB}^2$

daraus folgt $R = \frac{1}{4}\sqrt{6}\,a$





"Inkugel" mit Mittelpunkt M_i und Radius r :

$r^2 + (\overline{DG} - \overline{FG})^2 = (\overline{DF} - r)^2$

d.h. $r = \frac{1}{2\sqrt{6}}a$

G.R.