Von Kepler III zu Kepler III

Joachim Hoffmüller
jh.schule@googlemail.com

Luitpold-Gymnasium München
Seeaustr. 1
80538 München

Voraussetzungen:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Geschwindigkeit als Größe mit *Betrag* und *Richtung*

Vertrautheit mit der Berechnung von Δv in Δt bei eindimensionalen Bewegungen

(Beispiel einer Schülerarbeit: `Claire.xls`; es sollte der Fall einer Blei- mit dem Fall einer Styroporkugel verglichen werden; jeder Schüler musste in moodle die eigene Lösung hochladen.)

Eigene Erfahrung, dass eine Beschreibung genauer wird, wenn man Δt kleiner wählt (z.B. Harmonische Schwingung mit Δt = 0,1 s bzw. 0,002 s)

(Beispiel einer Schülerarbeit: `SchwingungenWagenDominik_0.1s_10c.xls` und `SchwingungenWagenDominik_0.002s_10c.xls` es sollte als Hausaufgabe die im Unterricht beobachtete Schwingung eines zwischen horizontalen Federn eingespannten Wagens mit unterschiedlicher Zeit-Schrittweite untersucht werden. Die Federhärte der Anordnung hatten wir experimentell ermittelt, die an der numerischen Lösung abgelesene Schwingungsdauer stimmt gut mit der gemessenen überein.)

Keplersche Gesetze (10.1)

„Pfeiladdition“ (bei Kräften, Jgst. 7)

Die im Unterricht verwendeten dynamischen Arbeitsblätter (*.ggb) wurden mit der frei erhältlichen Software GeoGebra erstellt und den Schülerinnen und Schülern auch in unserer moodle-Umgebung zum Download angeboten.

Beim Nachvollziehen des hier angebotenen Weges sollte man unbedingt die entsprechenden Dateien öffnen und damit „spielen“.

Kepler III:

„Für alle Planeten der Sonne hat der Quotient $\frac{(\text{Umlaufdauer})^2}{(\text{Bahnradius})^3}$ den gleichen Wert."

Warum?

Hinweis:
Das ist das umgekehrte Problem wie bei der numerischen Lösung der Bewegungsgleichung:

Dort war das Kraftgesetz *bekannt*, wir *berechneten* daraus den Verlauf der Bewegung und verglichen die Ergebnisse mit der Realität. (Beispiele „Fall mit Luftwiderstand", „Fallschirmspringer", „Harmonische Schwingung")

Hier *haben* wir die Bewegung und *erschließen* daraus das Kraftgesetz.

Kreisbewegung

Modell:
Eine Person schwingt eine Kugel an einem Seil im Kreis.

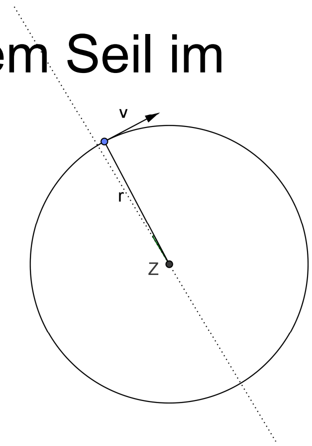


Illustration: `1 Kreisbewegung_eineposition.ggb`

Nötige Begriffe:
Umlaufdauer T

Geschwindigkeit hat Betrag und Richtung: $\vec{v}$

Betrag: „Tachoanzeige“, Bahngeschwindigkeit

$$v = \left|\vec{v}\right| = \frac{\text{Umfang}}{\text{Umlaufdauer}}$$

$$\boxed{v = \frac{2\pi \cdot r}{T}}$$

Richtung: ändert sich laufend

Winkelgeschwindigkeit ω

$$\omega = \frac{\text{vom Fahrstrahl überstrichener Winkel (Bogenmaß)}}{\text{benötigte Zeit}}$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Offenbar ist

$$\boxed{v = \omega \cdot r}$$

Übungen: Winkelgeschwindigkeit des großen Zeigers 2π/(3600s);
Bahngeschwindigkeit der Zeigerspitze bei Turmuhr, r=2m: v=3,5mm/s

Erarbeiten:

Trägheitssatz: Bewegung, wenn Seil reißen würde? (Beispiel: Funken bei Schleifstein / Flex) also:

Zu jedem Zeitpunkt steht $\vec{v}$ auf dem Seil senkrecht.

Ein Seil zieht immer nur in seiner Richtung. Hier: Zum Mittelpunkt.

Die Kugel am Seil fliegt nicht geradeaus (tangential) weiter, sondern um die Kurve. Die Ursache für diese dauernde Bewegungsänderung ist die Kraft des Seils, die immer „nach innen" zieht.

Diese Kraft zum Zentrum heißt Zentripetalkraft.

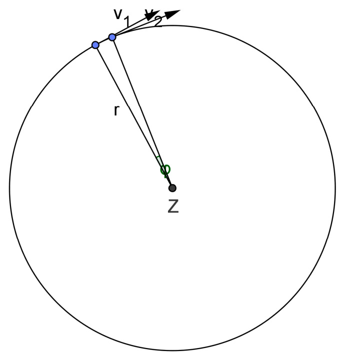
Die Erfahrung zeigt:
Schleudert man die Kugel *schneller*, so muss man *stärker* nach innen ziehen.
(Wenn das Seil diese Kraft nicht mehr übertragen kann, reißt es, es wirkt „keine Kraft" mehr, die Kugel fliegt tangential weiter.)

<u>Wie</u> groß muss die Zentripetalkraft sein?

$$F_Z = m \cdot a_Z = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Wir nehmen also einen Zeitschritt Δt und schauen, um wie viel sich die *Geschwindigkeit* geändert hat.

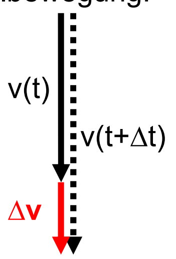
Illustration: `2 Kreisbewegung_zwei positionen_v1_v2.ggb`



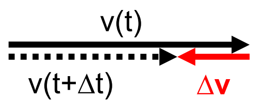
Zur Erinnerung:

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta v$$

Fallbewegung:

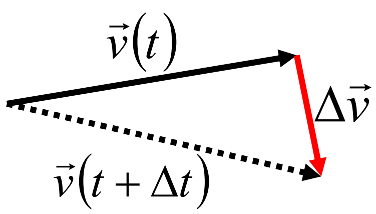


Federwagen rechts von Gleichgewichtslage:



Verallgemeinerung:

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta\vec{v}$$



Man zeichnet also die Pfeile für $\vec{v}(t)$ und $\vec{v}(t+\Delta t)$ an einen gemeinsamen Punkt und verbindet die Spitzen mit $\Delta\vec{v}$.

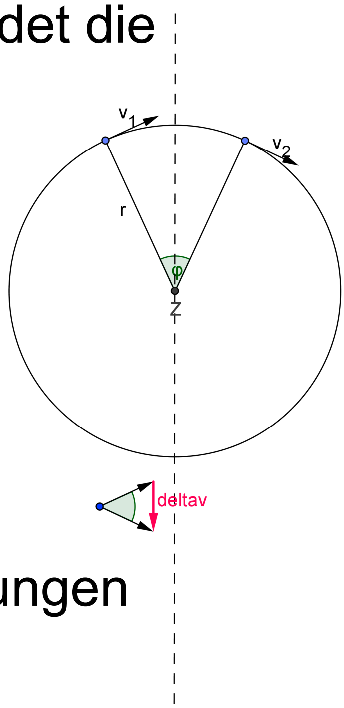


Illustration: `3 Kreisbewegung_v1_v2.ggb`

Hier Arbeitsblatt beschriften (Folie).
$\Delta\vec{v}$ eintragen.

Illustration: `4 Kreisbewegung_deltav.ggb`

Durch Variation der Drehweite Beobachtungen herausarbeiten:

- $\Delta\vec{v}$ zeigt in „Seilrichtung", wie erwartet (Beschleunigung in Richtung der Kraft!).
- Der Winkel zwischen $\vec{v}(t)$ und $\vec{v}(t+\Delta t)$ ist gleich dem Mittelpunktswinkel!

Wie groß ist der Betrag von $\Delta\vec{v}$?

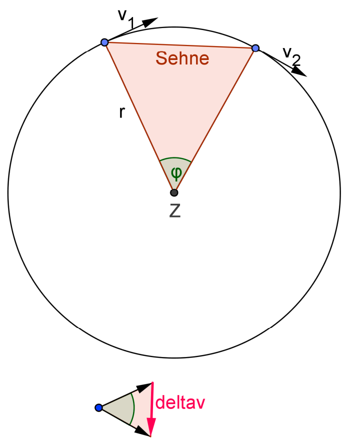


Illustration: `5 Kreisbewegung_Dreiecke.ggb`

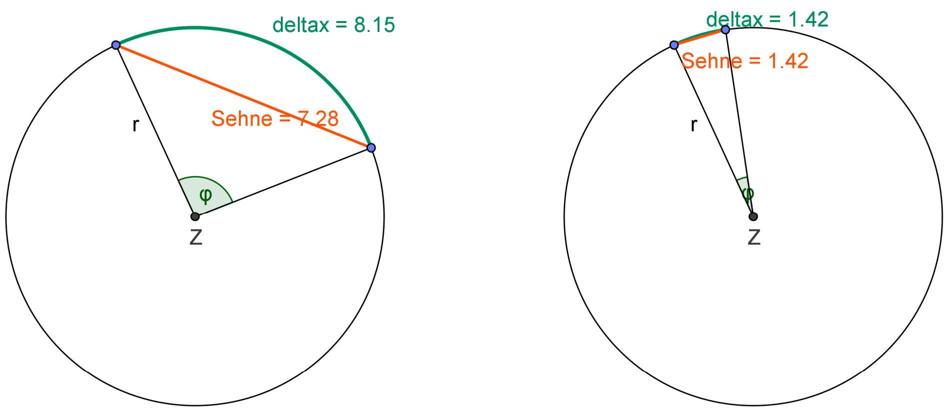
Entscheidende Beobachtung: Geschwindigkeitsdreieck und Radiendreieck sind beide gleichschenklig mit gleichem Winkel an der Spitze: Sie sind **ähnlich**.

Deshalb sind entsprechende Seitenverhältnisse gleich:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\text{Sehne}}{r}$$

Die Kugel bewegte sich zwar nicht auf der Sehne, sondern auf dem *Bogen* Δx.

Wie immer wollen wir jedoch die Bewegung sehr *fein* in kleine Zeitintervalle zerlegen. Dann ist auch der Mittelpunktswinkel sehr klein. Was das bedeutet, sieht man mit unserem dynamischen Arbeitsblatt:
Illustration: `6 Kreisbewegung_b_s_näherung.ggb`



Man sieht:
Die Sehnenlänge unterscheidet sich immer weniger von der Bogenlänge. Also:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta \mathrm{x}}{r}$$

$$\Delta v = \frac{\Delta x}{r} \cdot v$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \frac{v}{r}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = v \cdot \frac{v}{r}$$

$$\boxed{a_Z = \frac{v^2}{r}}$$

Diese Zentripetalbeschleunigung erfährt jeder Körper, der sich mit Bahngeschwindigkeit *v* auf einem Kreis mit Radius *r* bewegt.

Hat er die Masse *m*, so bedarf es dazu einer Kraft

$$\boxed{F_Z = m \cdot a_Z = m \cdot \frac{v^2}{r}}.$$

Experimentelle Überprüfung mit dem Zentralkraftgerät

⇨ **bestätigt!**

Anwendung:
Welche Zentripetalbeschleunigung erfährt der Mond? Durch welche Kraft wird sie bewirkt?

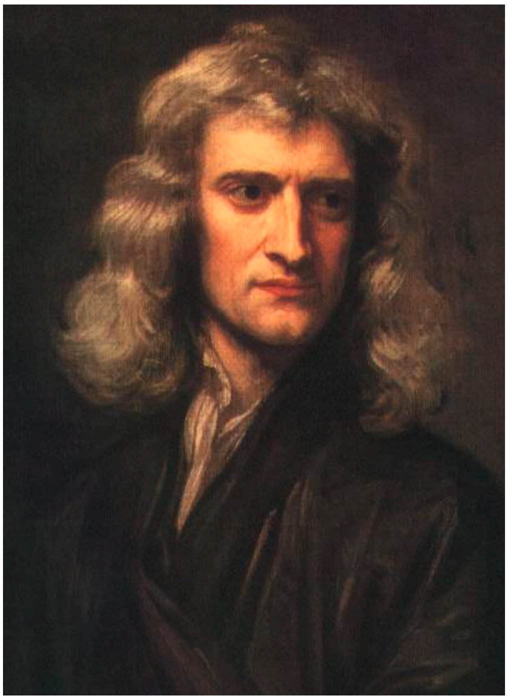
Bahnradius *r*:
Der Mond ist ca. **60** Erdradien vom Erdmittelpunkt entfernt. (r= 60,3*6370 km = $3,84 \cdot 10^8$ m)

Bahngeschwindigkeit:
T = 27,3 d = 27,3*24*3600s = $2,36 \cdot 10^6$ s
v = $1,02 \cdot 10^3$ m/s

$$a_Z = \frac{\left(1,02 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{3,84 \cdot 10^8 \text{m}} = 2,71 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Was bedeutet das?
Vergleich mit der Fallbeschleunigung auf der Erde:

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 3600 \cdot a_Z$$



Newtons Erkenntnis:

Die Beschleunigung des fallenden Apfels und die Zentripetalbeschleunigung des Mondes haben die gleiche Ursache: Die Gravitationseinwirkung der Erde. Diese ist in der 60-fachen Entfernung nur mehr $\frac{1}{3600} = \frac{1}{60^2}$ so groß.

One had to be a Newton to notice that the moon is falling,
when everyone sees that it doesn't fall.

Paul Valéry

Wechselwirkungsgesetz:
Gravitationskraft muss zu *beiden* Massen proportional sein.

Ansatz also insgesamt:

$$\boxed{F_G = G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{1}{r^2}}$$

(Gravitationsgesetz)

Dieses Gesetz nehmen wir nun auch für die Kräfte zwischen der **Sonne** und den **Planeten** an:

$$F_G = G \cdot m_{\text{Sonne}} \cdot m_{\text{Planet}} \cdot \frac{1}{r_{\text{Bahn}}^2}$$

Damit können wir auch die Zentripetalbeschleunigung ausrechnen, die ein Planet auf seiner Bahn erfährt:

$$\boxed{a_Z = \frac{F_G}{m_{\text{Planet}}} = G \cdot m_{\text{Sonne}} \cdot \frac{1}{r_{\text{Bahn}}^2}}$$

Diese gehört aber, wie wir jetzt wissen, bei gegebenem *r* zu einer ganz *bestimmten* Bahngeschwindigkeit. Zusammenhang:

$$a_Z = \frac{v_{\text{Bahn}}^{\ 2}}{r_{\text{Bahn}}}.$$

Mit $v_{\text{Bahn}} = \omega \cdot r_{\text{Bahn}} = \frac{2\pi \cdot r_{\text{Bahn}}}{T_{\text{Planet}}}$ erhält man

$$\boxed{a_Z = \frac{4\pi^2 \cdot r_{\text{Bahn}}}{T_{\text{Planet}}^{\ 2}}}$$

Gleichsetzen ergibt schließlich:

$$G \cdot m_{\text{Sonne}} \cdot \frac{1}{r_{\text{Bahn}}^{\ 2}} = \frac{4\pi^2 \cdot r_{\text{Bahn}}}{T_{\text{Planet}}^{\ 2}}$$

$$\frac{T_{\text{Planet}}^{\ 2}}{\mathrm{r}_{\text{Bahn}}^{\ 3}} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_{\text{Sonne}}}$$

Damit ist das dritte Keplersche Gesetz erklärt.

Zusammenfassung:

1) Beobachtung: Kepler III (für Kreisbahnen)
2) Untersuchung der gleichförmigen Kreisbewegung mit gegebener Bahngeschwindigkeit => a_z, F_z
3) Experimentelle Überprüfung
4) Anwendung auf die Mondbahn => Gravitationsgesetz
5) Gravitationsgesetz => Erklärung von Kepler III für Kreisbahnen